

## 6. Estática de Fluidos.

- Un fluido es una sustancia capaz de fluir, como líquidos y gases y carece de forma fija de forma que adopta la forma del recipiente que lo contiene. Ambos sin embargo tienen coeficientes de compresibilidad muy diferentes. Por ejemplo un gas se comprime fácilmente mientras que los líquidos son prácticamente incompresibles.
- Los fluidos son sustancias que no soportan esfuerzos cortantes (no aparecen esfuerzos cortantes recuperadores), de forma que cambia continuamente de forma mientras está sometido a dichos esfuerzos, por pequeños que sean.
- Aunque los fluidos poseen una estructura discreta (se componen de moléculas que se mueven) vamos a considerar los fluidos como medios continuos sin espacios huecos en ellos.
- El término estática de fluidos se refiere al estudio de los fluidos en reposo, mientras que dinámica de fluidos estudia los fluidos en movimiento. Los fluidos en reposo o en movimiento uniforme en equilibrio deberán estar libres de esfuerzos cortantes pues no los soportan.

### 6.1 Densidad

- La densidad de un material homogéneo se define como su masa por unidad de volumen. Sus unidades en el S.I son  $1kg \times m^{-3}$  y en el sistema c.g.s  $1gr \times cm^{-3}$ . La densidad se representa por la letra  $\rho$  y viene definida como

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densidad del agua es  $\rho_{agua} = 1gr \times cm^{-3}$  y la del agua del mar  $\rho_{agua_{mar}} = 1,03gr \times cm^{-3}$

- Se define como *gravedad específica de una sustancia* la razón entre su densidad y la densidad del agua. También se le llama **densidad específica**.
- Las medidas de densidad son muy importantes en tecnología (medida del estado de las baterías, anticongelantes) como en medicina (valoraciones y análisis de fluidos corporales como la sangre y la orina, pues, por ejemplo, ciertas enfermedades producen secreción de sales que aumentan la densidad de la orina).

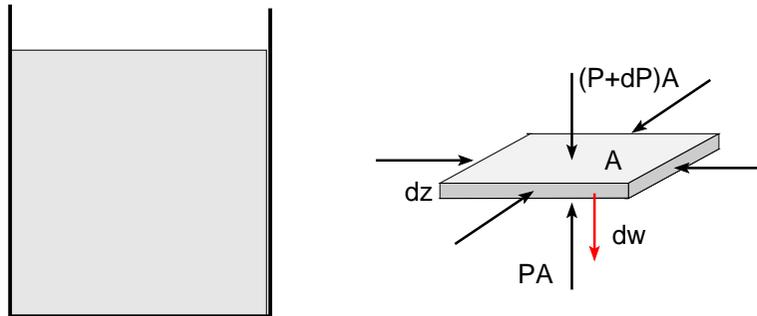
## 6.2 Presión en un fluido: manómetros y bombas de vacío

- La presión en un fluido se debe a la transferencia de energía cinética de las moléculas que lo constituyen en los choques sobre una superficie inmersa en el fluido. En fluidos como la atmósfera el propio peso del fluido afecta a los valores de presión y ésta no es la misma a nivel del mar y en lo alto de una montaña.
- Desde un punto de vista más preciso definimos **presión en cualquier punto de un fluido** como la razón de la fuerza normal  $dF$  ejercida sobre una pequeña superficie  $dA$  que incluya dicho punto, y dicha área,

$$P = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = PdA$$

Si la presión es la misma en todos los puntos de la superficie plana finita  $A \Rightarrow P = \frac{F}{A}$ .

- Vamos a determinar la relación general de la presión en un punto de un fluido sometido a un campo gravitatorio. Si el fluido está en equilibrio  $\Rightarrow$  cualquier elemento de volumen lo está. Sólo tenemos que tener en cuenta esfuerzos compresores pues esfuerzos cortantes hacen que el fluido no esté en equilibrio ni en reposo.



Consideremos un elemento de volumen (ver dibujo)  $dV = A dz$  donde  $A$  es el área de la base y  $dz$  es la altura. Si  $\rho$  es la densidad del fluido  $\Rightarrow$  la masa de este elemento de volumen es  $m = \rho dV = \rho A dz$  y su peso  $dw = mg = \rho A dz g$ .

- La fuerza ejercida por el fluido que lo rodea sobre el elemento en cada punto es perpendicular a su superficie. En las direcciones  $X$  e  $Y$  la resultante de las fuerzas que actúan son nulas (no hay esfuerzos cortantes netos). En la dirección del eje  $Z$

$$\sum F_z = 0$$

$$PA - (P + dP)A - \rho A dz g = 0$$

de donde obtenemos

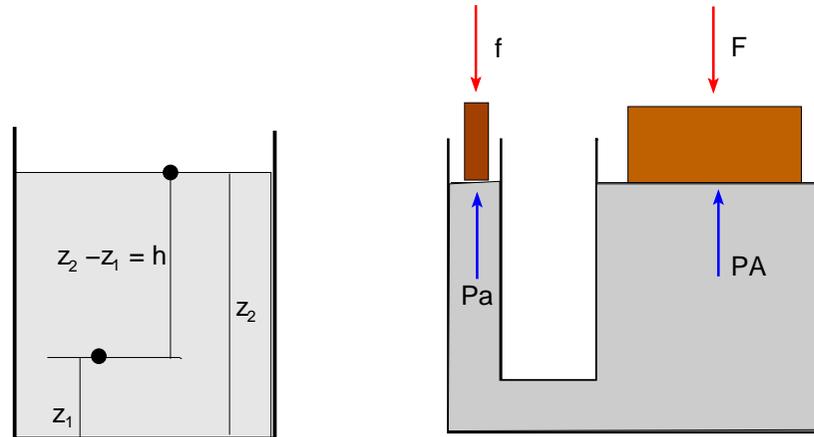
$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

⇒ la presión disminuye con la altura, pues  $\rho$  y  $g$  son definidas positivas. Es decir una variación de la altura positiva  $dz > 0$  (aumento de altura) implica una variación negativa de la presión (disminución de la presión).

- La anterior no es más que *la ec. de Euler para un fluido en reposo*. Supongamos dos niveles de altura  $z_1$  y  $z_2$  a los que tenemos una presión  $P_1$  y  $P_2$ , entonces tenemos que

$$P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1). \quad (1)$$

Vamos a aplicar esta expresión al caso de un líquido en un recipiente abierto:  $z_2$  es el nivel al que está la superficie libre del líquido (en contacto con la atmósfera) y  $z_1$  es la altura de cualquier punto en el fluido por debajo de la superficie libre del líquido ⇒



$$P_a - P = -\rho g h \Rightarrow P = P_a + \rho g \quad (2)$$

donde  $h = z_2 - z_1$  es la profundidad a la que estamos midiendo la presión

- La presión en cualquier punto del fluido no depende de la forma de la vasija que lo contiene si no sólo de la profundidad.

⇒ de (2) se tiene que al aumentar la presión  $P_a$ , por ejemplo mediante un pistón, aumenta también la presión a cualquier profundidad en la misma cantidad. Este hecho se conoce con el nombre de **principio de Pascal**, establecido por el científico francés Blas Pascal (1623-1662): como

*“La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a cada punto del fluido y a cada punto de las paredes del recipiente que lo contiene”*

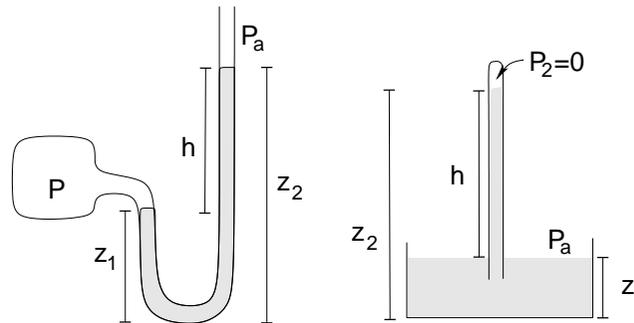
- Dicho principio está en la base de la prensa hidráulica o del gato hidráulico, que permite con pequeñas fuerzas sobre superficies pequeñas (presión muy grande) levantar grandes pesos sobre superficies grandes (exactamente la misma presión que sobre la superficie pequeña)

$$P = \frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \frac{A}{a} f$$

la prensa hidráulica es un dispositivo que multiplica la fuerza por un factor que es igual a la razón de las áreas de los dos pistones.

- Para derivar la ecuación (1) se ha considerado que la densidad es constante, aproximación válida para los líquidos (son incompresibles) pero no sirve para los gases, es decir que **cuando se calcula la variación de la presión con la altura en la atmósfera terrestre hay que tener en cuenta la variación de la densidad.**

### 6.3.1 Manómetros y bombas de vacío



- Los manómetros son aparatos utilizados para medir la presión de un gas. P.e. tubo abierto en forma de U (ver dibujo) que contiene un líquido. Un extremo del tubo está a una presión  $P$  que se quiere medir mientras que el otro está comunicado con la atmósfera a presión  $P_a$ .
- Por un lado la presión en el fondo de la columna es  $P + \rho g z_1$  y por el otro  $P_a + \rho g z_2$  de donde igualando

$$P + \rho g z_1 = P_a + \rho g z_2$$

$$P - P_a = \rho g (z_2 - z_1) = \rho g h$$

A  $P$  se le llama **presión absoluta**, mientras que a la diferencia  $P - P_a$  se le llama **presión manométrica** y es proporcional a la diferencia de altura de las columnas de líquido.

- Basado en este resultado está el del *barómetro de mercurio*, tubo largo y fino cerrado por un extremo lleno de mercurio y que se invierte en una cubeta de mercurio (ver figura)  $\Rightarrow$

$$P_a - P_2 = P_a = \rho g (z_2 - z_1) = \rho g h$$

pues  $P_2 = 0$  (vacío).

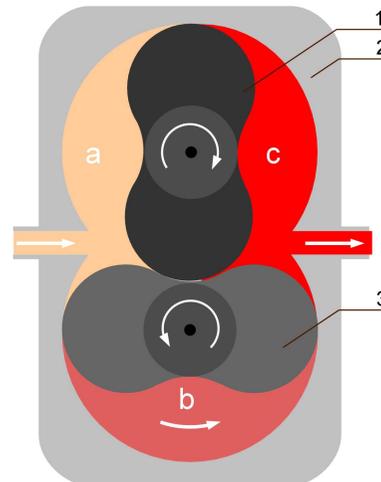
- La unidad de presión (como ya vimos) en el sistema internacional es el pascal:  $1 Pa = 1 N \times m^{-2}$ . Una unidad relacionada es el *bar*:

$$1 \text{ bar} = 10^5 Pa$$

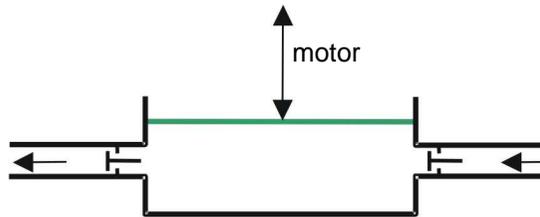
- El uso frecuente de manómetros de mercurio y barómetros  $\Rightarrow$  las presiones se miden también en *pulgadas de mercurio* o en *milímetros de mercurio (mmHg)*. La presión debida a una columna de mercurio de un milímetro de altura se llama **1torr** (Torricelli, fue el inventor del barómetro de mercurio).
- El aparato utilizado para medir la presión sanguínea se llama esfigmomanómetro y una lectura de presión, por ejemplo, de 130/80 corresponde a la máxima y mínima medidas en milímetros de mercurio o torrs.
- Una presión de  $1,013 \times 10^5 Pa = 1atm$  (atmósfera), luego  $1atm = 1,013bar = 1013 milibar$

### 6.3.2 Bombas de vacío

- Muchos dispositivos de la vida moderna incluyen depósitos en los que se ha extraído prácticamente todo el aire (por ejemplo la bombillas de incandescencia, antiguos tubos de imagen, tubos de vacío en colectores solares, los termos o vasos de Dewar, etc).
- **Para extraer el aire** se utilizan bombas especiales que se denominan **bombas de vacío** que mediante diferente tipos de procesos extraen el aire del recipiente en cuestión: por ejemplo la bomba rotatoria (ver dibujo).

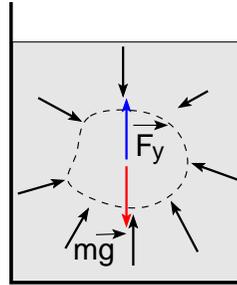


- También se utilizan para comprimir gases y hacer circular líquidos (en refrigeradores domésticos y en aires acondicionados) y en esencia **el principio esencial es la variación del volumen (lo que incrementa o disminuye la presión)** y un conjunto de válvulas que garantizan el flujo unidireccional del fluido.
- En los casos en los que es importante evitar la contaminación del fluido el volumen variable se consigue por **diafragma flexible que se mueve accionado por un motor**: bombas de gasolina de motores de automóvil, el corazón también funciona mediante este mecanismo y permite hacer circular la sangre a lo largo de todo el cuerpo. También algunas bombas de corazones artificiales usan **bombas de diafragma**.



### 6.3 Principio de Arquímedes

- El empuje de los líquidos es un fenómeno conocido desde hace mucho tiempo. Un cuerpo sumergido en el agua parece pesar menos que en el aire  $\Rightarrow$  **un cuerpo cuya densidad media es menor que la del fluido en el que esta inmerso puede flotar en él** (cuerpo humano en agua o globo de helio en aire).
- El principio de arquímedes establece *“cuando un cuerpo está sumergido en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido desalojado por él”*
- **Vamos a demostrar este principio.** Consideremos una porción de fluido en reposo de forma irregular en un recipiente. Al estar en equilibrio con el resto del fluido la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la porción de fluido (y que son ejercidas por el resto del fluido) debe ser cero (ver dibujo):



$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= 0 \\ \sum_i F_{i,x} &= 0 \\ \sum_i F_{i,y} - mg &= 0 \Rightarrow \sum_i F_{i,y} = mg \end{aligned}$$

donde  $mg$  no es más que el peso de la porción de fluido.

- En la última expresión tanto  $\vec{w} = m\vec{g}$  con la componente  $y$  de la resultante de las fuerzas tienen una línea de acción que pasa por el centro de gravedad de la porción de fluido. Si ahora sustituimos la porción de fluido por un cuerpo con exactamente la misma forma que la porción de fluido tenemos demostrado el teorema, pues  $\sum_i F_{i,y} = E$  no es más que el **empuje del fluido sobre la porción de fluido y por lo tanto también sobre el cuerpo**, es decir

$$E = mg$$

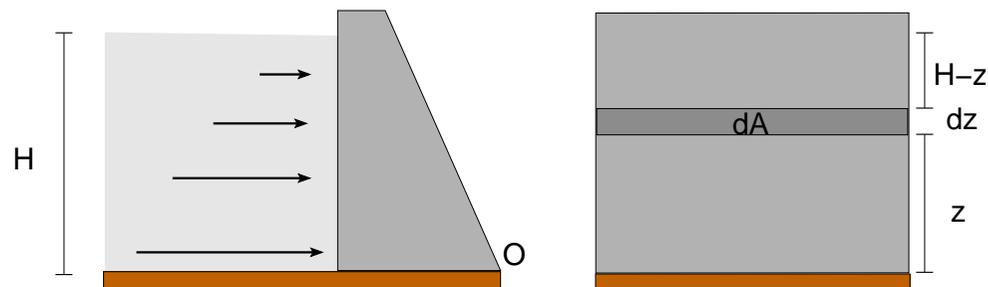
donde  $m$  es la masa del fluido desalojado por el cuerpo.

- Notad que cuando introducimos el cuerpo (que tiene el mismo volumen que la porción de fluido), éste no tiene por qué estar en equilibrio con el fluido y puede ocurrir
  - $\sum_i F_{i,y} = mg > m'g$  donde  $m'$  es la masa del cuerpo  $\Rightarrow$  el cuerpo flota sobre la superficie y  $\rho' < \rho$
  - $\sum_i F_{i,y} = mg = m'g \Rightarrow$  el cuerpo queda inmerso en el fluido sin hundirse y  $\rho' = \rho$
  - $\sum_i F_{i,y} = mg < m'g \Rightarrow$  el cuerpo se hunde al fondo y  $\rho' > \rho$ .

- En general ocurre que si el cuerpo no es homogéneo la línea de acción de la componente  $y$  de la resultante de las fuerzas no pase por el centro de gravedad del cuerpo  $\Rightarrow$  puede aparecer un torque o momento que haría que el cuerpo girase en las tres situaciones anteriores.
- El principio de Arquímedes tiene múltiples aplicaciones:
  - Funcionamiento de un globo aerostático o el submarino.
  - Funcionamiento de los densímetros, que no es más que un tubo de vidrio con un peso en el fondo y una escala graduada de forma que al introducirlo en un fluido se hunde hasta una profundidad dada desalojando cierto volumen de fluido de forma que como en esta situación  $m = m'$  permite midiendo el volumen desalojado calcular la densidad del fluido.
  - Uso en medicina en la técnica de hidroterapia para mover por ejemplo miembros de enfermos impedidos; cuando se sumerge en agua la densidad media del cuerpo humano es un poco mayor que la del agua de forma que el cuerpo se vuelve casi ingravido y permite hacer ejercicios terapéuticos.
  - También se utiliza para medir los índices de grasa corporal mediante el método de Behnke.

## 6.4 Fuerzas contra un dique

- Supongamos un dique en una presa donde el agua alcanza una altura total  $H$  en la pared vertical y ejerce una cierta fuerza horizontal  $\vec{F}$  sobre el dique.



⇒ la fuerza depende de la profundidad. Vamos a verlo, sabemos que la presión en el interior del fluido a una altura  $z$  respecto del fondo es

$$P = \rho g(H - z)$$

podemos despreciar la presión atmosférica pues esta actúa sobre las dos caras del dique ⇒ la fuerza total ejercida sobre un elemento de superficie  $dA = Ldz$  ( $L$  longitud del dique) entre  $z$  y  $z + dz$  es

$$dF = PdA = \rho g(H - z)dA = \rho g(H - z)Ldz$$

de donde integrando se tiene que la fuerza total sobre el dique es

$$F = \int_0^H \rho g(H - z)Ldz = \frac{1}{2}\rho gLH^2$$

- El torque o momento de la fuerza  $dF$  sobre el dique respecto el punto  $O$  más profundo es

$$dM = zdF = \rho gL(H - z)z dz$$

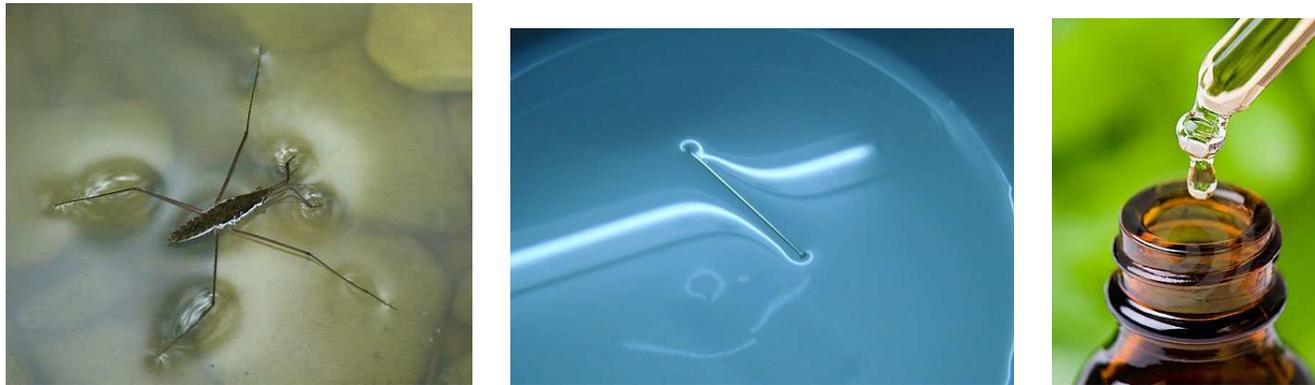
de donde el momento total sobre el dique es

$$M = \int_0^H \rho gL(H - z)z dz = \frac{1}{6}\rho gLH^3$$

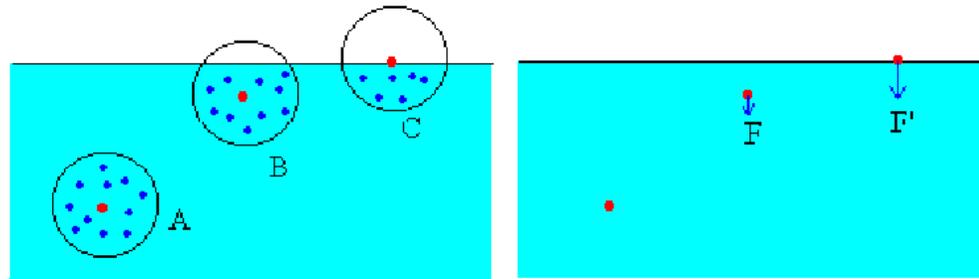
- **EJERCICIO:** determinar a que profundidad tendría que estar el punto de acción de la fuerza total  $F$  para producir dicho momento sobre el punto  $O$  del dique.

## 6.5 Tensión superficial

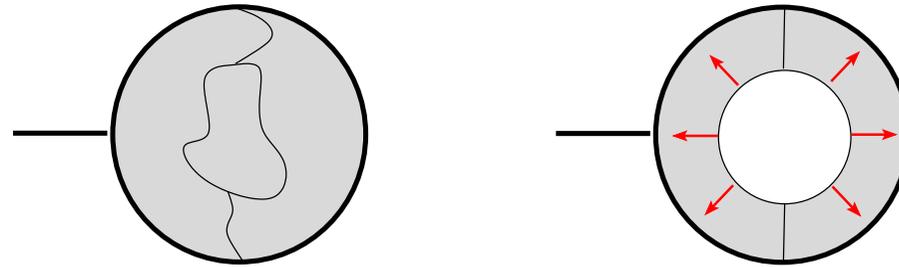
- Hay multitud de fenómenos asociados a la existencia de una superficie límite entre un líquido y cualquier otra sustancia: P.e. un líquido que fluye lentamente por el extremo de un cuentagotas, o un objeto muy liviano que no se hunde en un fluido (como las chinches acuáticas) o una hoja o una aguja sobre el agua. También cuando un tubo de vidrio muy fino y hueco (**capilar**) se sumerge en agua, ésta asciende por el tubo (como las plantas) pero si se sumerge en mercurio el mercurio desciende.



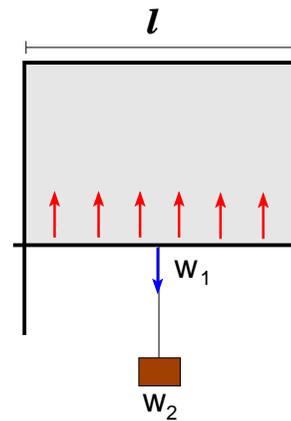
- Todos estos fenómenos superficiales indican que **la superficie de un líquido se encuentra en un estado de esfuerzo o tensión** de tal forma que si consideramos cualquier línea sobre ella la sustancia que se encuentra a un lado cualquiera de dicha línea ejerce una tracción sobre la sustancia situada al otro lado, tracción que se ejerce en el plano de la superficie y que es perpendicular a la línea (ver dibujo).



- **Esta tensión superficial** se puede poner de manifiesto de forma muy sencilla: consideremos un anillo de alambre cerrado con un bucle de hilo como se muestra en la figura, y se sumerge en una solución jabonosa. Cuando se pincha el interior del bucle la tensión superficial de la lámina jabonosa hace que el hilo adquiera la forma circular pues la tensión es la misma en todos los puntos del bucle. Antes de pinchar el bucle las misma tensión existía pero ésta era contrarestanda por la tensión que ejercía la película jabonosa dentro del bucle.



- Otro experimento: Un alambre en forma de U invertida y un segundo alambre que desliza sobre él.



el segundo alambre (que tiene un peso  $w_1$ ) se desplaza hacia arriba debido a la tensión superficial de la película jabonosa que tira de él. **La fuerza de tensión no aumenta cuando se coloca un segundo peso  $w_2$**  (al contrario que los materiales elásticos) aunque se estire más la superficie de la película jabonosa.

- Esto se explica de la siguiente forma: la película aunque fina tiene un tamaño considerable comparado con el tamaño típico de una molécula, luego se puede considerar como un volumen de fluido separado por dos capas superficiales; cuando se estira consecuencia del peso **las moléculas del interior pasan a las capas más superficiales** de forma que éstas siguen sin tensarse (que sí ocurriría al estirar una goma elástica).

- Si  $l$  es la longitud del alambre deslizante, como la película tiene dos superficies la longitud total a lo largo de la cual actúa la fuerza superficial sobre el deslizador es  $2l$ . La tensión superficial en la película se define como la razón de la fuerza superficial a la longitud (perpendicular a la fuerza) a lo largo de la cual actúa, es decir

$$\gamma = \frac{F}{2l}$$

- La unidad de tensión superficial en el S.I. es  $U_\gamma = 1N \times m^{-1}$ . Se utiliza más la del sistema c.g.s., esto es

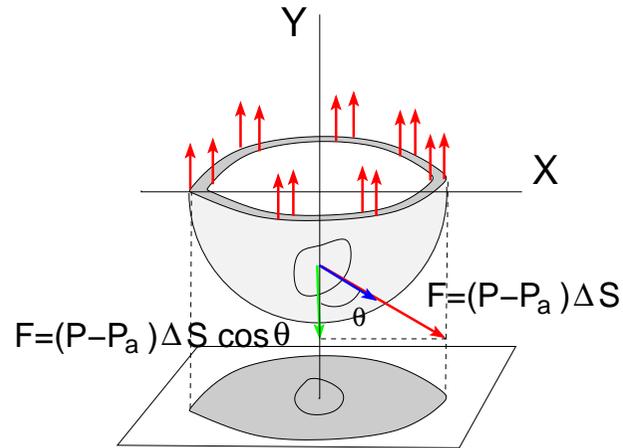
$$1dina \times cm^{-1}$$

- El método para calcular la tensión superficial de un fluido consiste en medir la fuerza necesaria para equilibrar las fuerzas superficiales  $2\gamma l$  y extraer un alambre inmerso en el fluido.
  - La tensión superficial de un líquido en contacto con su propio vapor o con el aire depende sólo de la naturaleza del líquido y de la temperatura.
  - Una superficie sometida a tensión superficial tiende a contraerse hasta ocupar el área mínima compatible con los límites de la superficie, o con las diferencias de presión en las caras opuestas de la superficie. P. e., una porción de líquido en caída libre en el vacío, no sometida a fuerzas externas, tiene siempre forma esférica porque para un volumen dado la esfera tiene la menor área que cualquier otra superficie geométrica.

## 6.6 Diferencia de presión entre las caras de una película superficial

- **Una burbuja de jabón:** Está constituida por dos películas superficiales esféricas muy próximas con líquido entre ellas. La tensión superficial en cada una de ellas hace que tiendan a contraerse, pero al hacer esto comprime el aire dentro de la burbuja aumentando la presión hasta un punto en el que se impide una contracción mayor. Vamos a encontrar una relación entre la tensión superficial y este exceso de presión.
- Consideremos un elemento de área  $\Delta S$  en la superficie de la burbuja (ver dibujo). La presión fuera de la burbuja es  $P_a$  y la presión dentro de la burbuja es  $P \Rightarrow$  la fuerza normal al elemento  $\Delta S$  es  $(P - P_a) \times \Delta S$ . La

componente de esta fuerza en el eje  $Y$  es  $(P - P_a)\Delta S \cos \theta$ , pero  $\Delta S \cos \theta$  es la proyección del vector superficie  $\Delta \vec{S}$  en el eje  $Y \Rightarrow$  la componente de la fuerza en el eje  $Y$  es el producto de la diferencia de presiones dentro y fuera de la burbuja por la proyección del elemento de área en la dirección  $Y$  (Ver dibujo).



luego la fuerza total hacia abajo creada por la mitad de la burbuja será

$$F = (P - P_a)\pi R^2$$

pues  $\pi R^2$  es la proyección de la burbuja en la dirección  $Y$ . Por otra parte la fuerza hacia arriba debido a la tensión superficial en las dos películas es

$$F' = 2\gamma l = 2\gamma 2\pi R = 4\gamma\pi R$$

- Como la burbuja está en equilibrio ambas fuerzas son iguales es decir  $F = F'$  lo que implica

$$\begin{aligned} (P - P_a)\pi R^2 &= 4\gamma\pi R \\ P - P_a &= \frac{4\gamma}{R} \end{aligned}$$

- Si tensión superficial es constante (temperatura constante) **la diferencia de presión es mayor para las burbujas más pequeñas que para las grandes**,  $\Rightarrow$  dos burbujas conectadas por un tubo, la más grande absorberá a la más pequeña.
- En una gota de agua se puede hacer el mismo razonamiento. Ahora solo tenemos una película superficial y  $P$  es la presión dentro de la gota  $\Rightarrow F' = 2\gamma\pi R$  con lo que

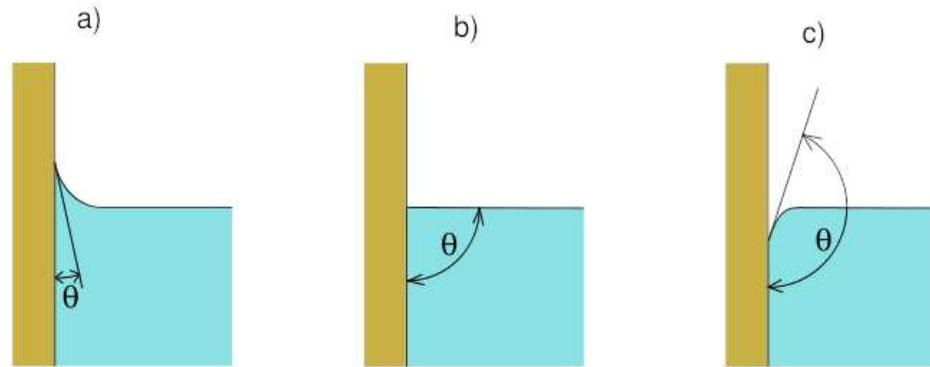
$$P - P_a = \frac{2\gamma}{R}$$

## 6.7 Ángulo de contacto y capilaridad

- Hemos estudiado películas superficiales que separan un líquido de un gas, pero también existen películas superficiales que separan un sólido de un líquido y un sólido de un gas. El espesor de las películas es de sólo algunas moléculas y asociada a cada película hay una tensión superficial. Denotamos:
  - $\gamma_{SL}$  =tensión superficial película sólido-líquido
  - $\gamma_{SV}$  =tensión superficial película sólido-vapor
  - $\gamma_{LV} = \gamma$  =tensión superficial película líquido-vapor
- **Ángulo de contacto  $\theta$**  : ángulo que forman las direcciones de las tensiones superficiales  $\gamma_{SL}$  y  $\gamma_{LV}$



La curvatura de la superficie de un líquido en la proximidad de una pared sólida depende de la diferencia entre  $\gamma_{SV}$  y  $\gamma_{SL}$ . Si  $\gamma_{SV} > \gamma_{SL}$  el líquido *moja* la pared sólida y  $\theta$  es menor de  $90^\circ$  (p.e. yoduro de metileno). Si  $\gamma_{SV} < \gamma_{SL}$  el líquido no moja la pared sólida y  $\theta$  es mayor de  $90^\circ$  (p.e. el mercurio). En el caso del agua se tiene que  $\gamma_{SV} \approx \gamma_{SL}$  y  $\theta$  es prácticamente  $90^\circ$ .



- Las impurezas añadidas a un líquido pueden alterar el ángulo de contacto. Los agentes humectantes o detergentes reducen el ángulo de contacto desde un valor grande mayor de  $90^\circ$  a otro muy inferior a  $90^\circ$ . Los agentes impermeabilizantes en cambio aplicados a un tejido hacen que el ángulo de contacto del agua con el tejido sea mayor de  $90^\circ$ .
- Un fenómeno originado por la tensión superficial es la elevación de un líquido en tubos de sección muy pequeña o *capilares*, y el fenómeno en cuestión se llama *capilaridad*. En líquidos que mojan el tubo (el ángulo de contacto es menor de  $90^\circ$ ) el líquido asciende hasta alcanzar una altura de equilibrio. La superficie curva del líquido en el tubo se denomina **menisco**, que en este caso sería cóncavo. Para un líquido que no moja la pared del tubo capilar se produce un descenso y el menisco que se forma es convexo.
- Si tenemos un tubo de radio  $r$ , y consideramos la fuerza ascendente es debida a la tensión  $\gamma_{LV}$  se tiene que la fuerza total ascendente es

$$F = 2\pi r \gamma_{LV} \cos \theta$$

Por otra parte el peso de la columna elevada una altura  $h$  es

$$w = mg = \rho V g = \rho g \pi r^2 h$$

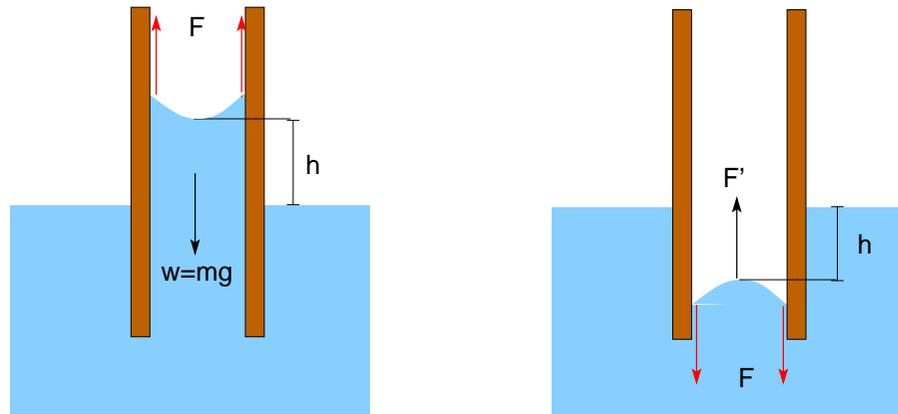
donde hemos despreciado el volumen del propio menisco. Como la columna está en equilibrio ambas fuerzas son iguales, es decir

$$\rho g \pi r^2 h = 2\pi r \gamma_{LV} \cos \theta$$

de donde despejando  $h$  se obtiene

$$h = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{\rho g r}$$

que se conoce como *ley de Jurin*.



- EJERCICIO: demostrar que esta ley se cumple también para el caso de un líquido que no moja el fluido como el mercurio y ahora lo que se produce es un descenso del nivel del líquido en el capilar dado por  $h$ .
- La capilaridad explica la absorción de la tinta por el papel, la elevación del combustible de un mechero, etc. Además tiene una gran importancia en procesos vitales por ejemplo el ascenso de la savia de las plantas desde las raíces hasta las hojas (debida en parte a la capilaridad y debida en parte a la presión osmótica como veremos). En animales superiores como los humanos la capilaridad es más importante en los vasos sanguíneos más pequeños que de hecho se denominan capilares.