Benemérita Universidad Autónoma De Puebla

Facultad De Ciencias Físico Matemáticas

Generación y Comparación de Patrones de Difracción de Aberturas Poligonales e Hipocicloides

Tesis Presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física Aplicada

por

César de Gante González

asesorado por

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero

Puebla Pue.

Agradecimientos...

A quienes de alguna manera participaron en este trabajo

DEDICADO A...

Alejandra y Socorro

A la memoria de Ricardo.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

Un fenómeno óptico presente en nuestra vida diaria es la difracción, la cual podemos observar de diferentes formas, como por ejemplo los colores sobre el caparazón de algunos insectos. Sin duda alguna hemos observado con atención a los insectos conocidos comúnmente como “mayates” y notamos que son de colores muy llamativos, dichos colores se deben a que la estructura de su caparazón funciona como una rejilla de difracción la cual descompone la luz solar que incide sobre el insecto generando la gama de colores observados.

El fenómeno de la difracción es ampliamente estudiado ya que se puede obtener a través de diferentes técnicas, una de ellas es empleando aberturas de diferentes formas. Así, en este trabajo de tesis se hizo una comparación experimental y numérica entre los patrones de difracción generados por aberturas poligonales y por aberturas hipocicloides. En ambos casos se consideraron las siguientes condiciones: a) la luz se deja pasar a través de toda la superficie de la figura y b) la luz pasa sólo a través del contorno de la misma y la comparación se realizó para polígonos e hipocicloides que tienen de tres a diez lados.

Los patrones experimentales se obtuvieron empleando mascarillas diseñadas a partir de las ecuaciones paramétricas de las hipocicloides y a partir de polígonos dibujados mediante el programa Inkscape. Por otro lado, los resultados numéricos se obtuvieron mediante un programa realizado en GNU Octave.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Clásicamente la luz es considerada como una onda de campos eléctrico y magnético, los cuales son perpendiculares entre sí y oscilan perpendicularmente a su dirección de propagación, que puede ser a través de medios como el aire, el agua o el vacío; y a través de algunos otros medios como las fibras ópticas[1], dieléctricos, etc. Cuando la propagación de la luz se da a través de algún medio, llamado comúnmente *medio óptico*, se pone de manifiesto una característica de dicho medio: el *índice de refracción*; el cuál es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio, si el medio tiene un índice de refracción constante se le llama *medio óptico lineal* mientras que si el índice del medio no es constante el medio se denomina *no lineal*.

Matemáticamente, la luz se describe mediante una *función de onda* que debe satisfacer la llamada *ecuación de onda*[2], la cuál es una ecuación diferencial parcial de segundo grado que depende de las tres variables espaciales x,y,z y de la variable temporal t. Cualquier función que satisfaga dicha ecuación es definida como una onda, por ejemplo las ondas de radio, de sonido, en el agua, ondas electromagnéticas, etc. La solución más simple a la ecuación de onda son las ondas de tipo armónicas aunque no son las únicas, ya que también lo son las ondas planas, cilíndricas y esféricas; aunque éstas dos últimas lo son en un sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas respectivamente[3]. Cuando en la ecuación de onda se desprecia la parte temporal, ésta se transforma en una ecuación que solo depende de la parte espacial y es llamada *ecuación de Helmholtz* [4].

En base a que la luz es considerada como una onda, ésta tiene ciertas cantidades físicas que la caracterizan: la velocidad a la que se propaga en el medio v, la frecuencia angular w, la frecuencia temporal ν, la longitud de onda λ, el periodo temporal τ y el número de onda k.

La luz durante su propagación puede interactuar con diferentes objetos o medios, lo que hace que ocurran ciertos fenómenos como son la *reflexión*, la *refracción*, la *interferencia* y la *difracción entre otros*; siendo la difracción el tema central de este trabajo de tesis. La refracción y la reflexión se pueden explicar claramente mediante procedimientos de óptica geométrica, mientras que los fenómenos de interferencia y difracción requieren de un tratamiento puramente ondulatorio.[3]

Ambos fenómenos, interferencia y difracción son una clara muestra del carácter ondulatorio de la luz y están relacionados entre si, ya que no hay una diferencia física significativa entre ellos. La interferencia se produce cuando se superponen dos o más ondas en algún punto en el espacio generando una onda resultante con una amplitud distinta a las de las ondas superpuestas. Mientras que la difracción se produce cuando la luz se desvía al pasar a través de una abertura o de un objeto opaco, estas ondas desviadas interfieren entre si en algún punto generando una cierta distribución de intensidad llamada *patrón de difracción.* Así, la difracción es en realidad un fenómeno de interferencia de ondas; comúnmente se denomina interferencia cuando las ondas involucradas son pocas y difracción cuando se trata de un gran número de ondas.

Para que se produzca difracción de la luz, la abertura debe estar colocada delante de la fuente de tal manera que la luz incida directamente en ella y para "observar" el patrón generado por la abertura se coloca una pantalla sobre la cual se proyecta la distribución de éste o un sistema de captura de imagen. Dependiendo de las condiciones en las que se produce la difracción de la luz, ésta se puede dividir en dos clases: cuando el objeto que desvía la luz (abertura) se encuentra a una distancia muy pequeña (unos cuantos centímetros) tanto de la fuente de luz como del detector ocurre la llamada *difracción de Fresnel* o de *campo cercano*; en el caso contrario, cuando la rendija esta a una distancia muy grande se observa *difracción de Fraunhofer* o de *campo lejano.*

Este fenómeno de la difracción ocurre siempre en la vida diaria, pero en la mayoría de los casos las distribuciones de intensidad generados no las podemos observar ya que la separación entre las regiones de luz y de sombra que las definen son muy pequeñas, por lo que le tomamos muy poca o ninguna importancia a dicho fenómeno. Sin embargo, el estudio de la difracción es importante cuando se trabaja con sistemas ópticos, los cuales están formados por lentes, diafragmas entre otros componentes que presentan cierta difracción; la cual influye en la calidad de la imagen.

Durante muchos años se ha estudiado ampliamente la difracción producida por objetos o aberturas "típicas" como la circular, la cuadrada, la triangular y una rendija o un conjunto de rendijas. Se han obtenido expresiones matemáticas que describen a las aberturas y a las distribuciones generadas por éstas, tanto para el caso de *Fresnel* como para el caso de *Fraunhofer.* Sin embargo, se ha dejado un poco de lado el análisis para el caso de aberturas menos comunes como por ejemplo los polígonos, para las cuales se han encontrado expresiones de las distribuciones producidas en la región de Fraunhofer[5] , con este tipo de aberturas notamos que el análisis se complica considerablemente, comparado con el de las aberturas típicas. En el presente trabajo se obtienen experimental y numéricamente las distribuciones producidas por aberturas de tipo poligonal, pero también se obtienen las distribuciones de intensidad generadas por aberturas con formas más complicadas que las poligonales: las hipocicloides, para finalmente hacer una comparación entre cada una de ellas.

1.2 Objetivos y Estructura de la Tesis

OBJETIVO GENERAL

Hacer una comparación experimental y numérica de patrones de difracción de aberturas con forma de polígonos e hipocicloides

OBJETIVOS PARTÍCULARES

1. Diseñar una técnica para generar mascarillas (polígonos e hipocicloides) que proporcionen los patrones de difracción deseados.

2. Armar el arreglo experimental con las condiciones necesarias para la obtención de los diferentes patrones de difracción.

3. Obtención de los patrones de difracción con las mascarillas diseñadas.

4. Determinar la forma numérica para la obtención de dichos patrones para realizar la comparación con el caso experimental.

5. Obtención de los patrones de difracción numéricos.

6. Realizar la comparación de los diferentes patrones de difracción, tanto experimentales como numéricos.

ESTRUCTURA DE LA TESÍS

El trabajo se inicia haciendo una revisión de la teoría escalar de difracción en la que se concluye que los patrones de difracción para la región de Fraunhofer son descritos matemáticamente por la transformada de Fourier en dos dimensiones. Se revisa también la deducción de las expresiones matemáticas de las curvas hipocicloides a partir de las cuales se diseñaron las aberturas de las mascarillas empleadas en la parte experimental. Con el objetivo de hacer una comparación se implementa un programa en GNU Octave para llevar a cabo la simulación numérica de los patrones de difracción generados por cada abertura. Finalmente se lleva a cabo una comparación entre los resultados numéricos y experimentales obtenidos en cada caso.

En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la teoría escalar de difracción de Kirchhoff, en la cual usando el teorema de Green se transforma la ecuación diferencial de onda en una ecuación integral a partir de la cual se deducen las expresiones matemáticas que describen la difracción tanto para la región de Fresnel como para la región de Fraunhofer. En este capítulo se presenta también la deducción de las ecuaciones paramétricas de las curvas hipocicloides.

El capítulo 3 se refiere a la parte experimental del trabajo, en éste se explica como se diseñaron las aberturas poligonales e hipocicloides de las mascarillas empleadas, se describe el arreglo experimental y se muestran los resultados obtenidos.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos numéricamente y se hace la comparación entre estos y los resultados experimentales. Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 2

Teoría

Como se mencionó en el capítulo anterior el objetivo principal de este trabajo de tesis es realizar una comparación de diversos patrones de difracción de aberturas poligonales e hipocicloides, por ello es necesario llevar a cabo una revisión de la teoría fundamental de la difracción. En el presente capítulo se realiza dicha revisión dando una pequeña introducción acerca de la propagación de la luz en el espacio libre, revisando la difracción a partir de la teoría escalar de Kirchhoff, y obteniendo las expresiones matemáticas que describen la difracción de Fresnel y de Fraunhofer respectivamente. Finalmente se muestra una deducción de las funciones hipocicloides.

2.1 Representación Matemática de una Onda Luminosa

Una onda luminosa según la teoría electromagnética es un campo eléctrico E y un campo magnético $\vec{H}$ mutuamente perpendiculares y periódicos. En la representación matemática de una onda basta con especificar únicamente el valor instantáneo del campo eléctrico $\vec{E}$ como función del tiempo t. Si esta onda tiene un disturbio máximo, al que denominaremos amplitud A, una longitud de onda λ y una velocidad de propagación v, el campo eléctrico se puede representar por:

$$E = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt + \varphi_0)\right] \quad , \tag{2.1}$$

donde φ_0 es la fase de la onda para x=0 y t=0. Si ν es la frecuencia de la onda, se puede demostrar que:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad , \tag{2.2}$$

donde T es el periodo, y que:

$$\lambda \nu = v \quad . \tag{2.3}$$

Por otro lado se define la magnitud $|\vec{k}|$ del vector de propagación como:

$$k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \tag{2.4}$$

y la velocidad angular ω como:

$$\omega = 2\pi\nu \quad . \tag{2.5}$$

Con el uso de estas definiciones la ecuación (2.1) se transforma en la siguiente:

$$E = A\cos(kx - \omega t + \varphi) \quad . \tag{2.6}$$

La fase de una onda para el punto (x) en el instante t se define como:

$$\theta = kx - \omega t + \varphi \quad . \tag{2.7}$$

Generalizando la ecuación (2.6) para el caso de una onda que viaja en el espacio tridimensional propagándose en la dirección del vector $\vec{k}$, diferente de la dirección del vector $\vec{r}$ que va del origen al punto x,y,z que se considere, podemos escribir:

$$E = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi) \quad , \tag{2.8}$$

donde este vector $\vec{k}$ tiene las componentes:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta_x$$
$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta_y \quad , \tag{2.9}$$
$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta_z$$

siendo los cosenos en estas relaciones los cosenos directores de la dirección de propagación de la onda.

Un frente de onda está definido como la superficie en el espacio tal que para todos los puntos de esa superficie en un momento dado, la fase es constante. Por lo tanto para un frente de onda $k \cdot r = constante$

2.2 Propagación de la Luz en el Espacio Libre

Durante la primera mitad del siglo XIX, el modelo ondulatorio de la luz se consolidó gracias a los trabajos realizados por Oersted, Ampere, Faraday, Coulomb, Gauss, entre otros, adoptándose nuevas ideas acerca de la electricidad y el magnetismo. Más tarde, Maxwell propuso desarrollar relaciones matemáticas que describieran las leyes de Coulomb y Ampere, encontrando que estas leyes no eran del todo correctas: en particular la ley de Ampere era inconsistente con la ley de conservación de la carga. Maxwell, entonces, modifico la ley de Ampere y en el proceso descubrió que los campos eléctricos cambiantes (debido al desplazamiento de corriente) podían producir campos magnéticos, por lo que se estableció una simetría entre los campos magnéticos y eléctricos. Las relaciones que describen el electromagnetismo, desarrolladas por Maxwell, se conocen como *ecuaciones de Maxwell*[2].

Maxwell también observó que estas ecuaciones eran equivalentes a la ecuación clásica de onda para campos eléctricos y magnéticos en el espacio libre[2]. Éstas ecuaciones señalan que las ondas electromagnéticas o dicho de otra manera: la luz, viaja en el espacio con una velocidad definida c_0. Estas ondas pueden ser representadas a través de una función de onda que depende de la posición y del tiempo $u(\boldsymbol{r},t)$, la cual es solución de la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{2.10}$$

El operador Laplaciano en coordenadas rectangulares está dado por $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Todas las funciones que satisfacen a la ecuación (2.1), representan ondas tales como: las ondas que observamos al arrojar una piedra en el agua, las ondas de sonido, las ondas de luz, etc.

La ecuación (2.1) es una ecuación diferencial lineal, de tal manera que si se tienen n ondas dadas por $u_k(\mathbf{r},t)$ con k=1,2,3,...,n, entonces:

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\boldsymbol{r},t) \quad , \tag{2.11}$$

es también solución a la ecuación de onda, es decir, el principio de superposición es válido para la ecuación de onda.

Generalmente se expresa a la función de onda $u(\mathbf{r},t)$ en términos de una función compleja $U(\mathbf{r},t)$ que satisfaga la ecuación de onda y que cumpla la siguiente relación:

$$u(\boldsymbol{r},t) = Re\{U(\boldsymbol{r},t)\} \quad . \tag{2.12}$$

La función $U(\mathbf{r},t)$ puede ser separada en una parte espacial y una parte temporal de la siguiente forma:

$$U(\boldsymbol{r},t) = U(\boldsymbol{r})\exp(i2\pi\nu t) \quad , \tag{2.13}$$

$U(\mathbf{r})$ es llamada amplitud compleja de la onda, su magnitud $|U(\mathbf{r})| = a(\mathbf{r})$ que corresponde a la amplitud de la onda y el argumento $arg\{U(\boldsymbol{r},t)\} = \varphi(\boldsymbol{r})$ representa la fase.

2.3 Difracción De La Luz

La difracción junto con la interferencia es un fenómeno ondulatorio provocado por la desviación de las ondas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda.

De a cuerdo con el Principio de Huygens-Fresnel[6], cuando la onda incide sobre una rendija todos los puntos de su plano se convierten en fuentes secundarias de ondas, emitiendo nuevas ondas, denominadas ondas difractadas,
las cuales producen una distribución de intensidad, llamada patrón de difracción, que no es más que el patrón de interferencia entre las ondas secundarias procedentes de un gran número de fuentes puntuales. Es en este sentido, que no existe físicamente ninguna diferencia entre difracción e interferencia.

El fenómeno de difracción es usualmente clasificado y analizado en dos diferentes maneras. Si ambos, la fuente de luz y la pantalla de observación, están a una distancia infinita de la abertura de manera que las ondas que llegan a la abertura y a la pantalla pueden ser consideradas como ondas planas, entonces este fenómeno de difracción es conocido como *difracción de clase Fraunhofer o de campo lejano*. Experimentalmente tal situación puede ser realizada colocando la fuente de luz en el plano focal de una lente convexa y la pantalla de observación en el plano focal de otra lente convexa como se observa en la Figura 2.1a). El otro caso ocurre si la fuente de luz y/o la pantalla están colocadas a distancias finitas de la abertura, a este fenómeno se le llama *difracción de clase Fresnel o de campo cercano*, Figura 2.1b)

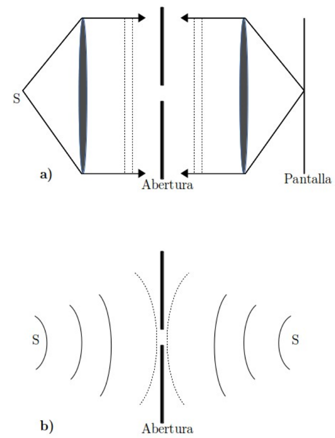

Figura 2.1: Condiciones en para generar difracción de clases Fraunhofer y Fresnel.

Es importante aclarar que el mecanismo de Huygens-Fresnel responsable de la producción del fenómeno de difracción ocurre durante la propagación de cualquier tipo de frente de onda, ya sea de sonido, onda material o luz; pero el patrón de difracción observable sólo se forma cuando una parte del frente de onda es obstruido por una abertura o un obstáculo.

Cuando la longitud de onda es más grande que el tamaño de la abertura por donde pasa el haz de luz, se puede emplear la teoría escalar de difracción, esta teoría consiste en la conversión de la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial parcial, en una ecuación integral.

TEORÍA ESCALAR DE DIFRACCIÓN

Para pasar de la ecuación diferencial de onda a la ecuación integral haremos uso del teorema de Green[4], el cual involucra dos funciones complejas *U(**r**)* y *G(**r**)*, llamadas funciones de Green, con primeras y segundas derivadas parciales continuas y sin puntos singulares dentro y sobre una superficie cerrada *S* que encierra un volumen *V*, para las cuales se cumple:

$$\iiint_V (G\nabla^2 U - U\nabla^2 G)\, dV = \iint_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS \quad , \tag{2.14}$$

donde $\partial / \partial n$ indica la derivada parcial en la dirección normal a cada punto de *S*. En nuestro caso, *U* representa la onda electromagnética.

Consideremos la propagación de una onda arbitraria que incide (desde un plano inicial *z=0)* sobre una pantalla a una distancia *z* y llamemos P_0 a un punto sobre la pantalla y P_1 a un punto sobre el plano inicial, como se observa en la Figura 2.2.

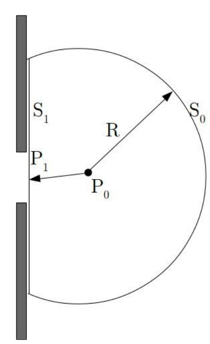

Figura 2.2 Geometría usada en la formulación de Kirchoff

Kirchoff eligió como función $G(\vec{r})$ una onda esférica dada por:

$$G(\vec{r})=\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad , \tag{2.15}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto P_0 al punto P_1, y r_{01} es su distancia correspondiente, dada por:

$$r_{01}=[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2]^{1/2} \tag{2.16}$$

$U(\vec{r})$ y $G(\vec{r})$ satisfacen la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U(\vec{r})+k^2 U(\vec{r})=0 \quad , \tag{2.17}$$

y

$$\nabla^2 G(\vec{r})+k^2 G(\vec{r})=0 \quad , \tag{2.18}$$

donde k es conocida como el número de onda y esta definida como:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad , \tag{2.19}$$

sustituyendo las ecuaciones (2.17) y (2.18) en el lado izquierdo de la ecuación (2.14) queda:

$$\iiint_V [G\nabla^2 U-U\nabla^2 G]\,dV=\iiint_V k^2[UG-UG]\,dV=0 \quad , \tag{2.20}$$

de manera que:

$$\iint_S [G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}]\, dS = 0 \quad . \tag{2.21}$$

Para la superficie S_0 de la Figura 2.2, tenemos

$$\begin{gathered} G(\vec{r}) = \frac{e^{ikR}}{R} \\ \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial n} = (ik - \frac{1}{R})\frac{e^{ikR}}{R}(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU) \end{gathered} \quad ,$$

así que la última integral de la ecuación (2.14) sobre S_0 es

$$\begin{aligned} I_{S_2} &= \int_{S_0} G(\vec{r})(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU)\, dS \\ &= \int_{\Omega} G(\vec{r})(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU) R^2\, dW \quad , \\ &= \int_{\Omega} e^{ikR}(R(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU))\, dW \end{aligned}$$

donde Ω es el ángulo solido subtendido de S_0 a P_0. La última integral es cero si:

$$\lim_{R \to \infty} R(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU) = 0 \quad . \tag{2.22}$$

La ecuación (2.22) es conocida como la *condición de radiación de Sommerfeld*.

La integral sobre S_1, se evalúa comúnmente empleando la aproximación de Kirchhoff, considerando que la abertura se encuentra sobre el plano $z=0$ como se ve en la Figura 2.2, la aproximación de Kirchhoff en el plano $z=0^+$ esta dada por las siguientes ecuaciones:

$$U(x,y,0^{+})=\begin{Bmatrix} U(x,y,0)\ dentro\ de\ la\ abertura \\ 0 \qquad\qquad fuera\ de\ la\ abertura \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial U(x,y,0^{+})}{\partial z}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U(x,y,0)}{\partial z}\ dentro\ de\ la\ abertura \\ 0 \qquad\qquad fuera\ de\ la\ abertura \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) son llamadas *condiciones de contorno de Kirchhoff* y nos llevan a la solución para $U(P_0)$:

$$U(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S [G\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial G}{\partial n}]dS \tag{2.25}$$

que es el *teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff* y desempeña un papel muy importante dentro del desarrollo del análisis del fenómeno de difracción.

La ecuación (2.25) se puede simplificar si consideramos que usualmente la distancia r_{01} desde el punto de la abertura hasta el punto de observación es mayor que la longitud de onda, es decir $k>>1/r_{01}$, entonces de la ecuación (2.15) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} &= \cos(\vec{n},\vec{r}_{01})(ik-\frac{1}{r_{01}})\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \\ &\approx ik\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sustituyendo la aproximación (2.26) y la ecuación (2.15) en la ecuación (2.25) obtenemos:

$$U(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}[\frac{\partial U}{\partial n}-ikUcos(\vec{n},\vec{r}_{01})]\,dS \quad . \tag{2.27}$$

Suponiendo que la abertura es iluminada por una sola onda esférica

$$U(P_1)=A\frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \quad ,$$

que surge de una fuente en un punto P_2, a una distancia r_{21} del punto P_1. Si r_{21} es mayor que la longitud de onda, entonces la ecuación (2.27) se reduce a

$$U(P_0)=\frac{A}{i\lambda}\iint_S \frac{e^{ik(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}}\left[\frac{\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})-\cos(\vec{n},\vec{r}_{21})}{2}\right]dS \quad , \tag{2.28}$$

si tomamos:

$$U'(P_1)=\frac{1}{i\lambda}\frac{Ae^{ik(r_{21})}}{r_{21}}\left[\frac{\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})-\cos(\vec{n},\vec{r}_{21})}{2}\right] \quad , \tag{2.29}$$

la ecuación (2.28) queda de la siguiente manera:

$$U(P_0)=\iint_S U'(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}dS \quad , \tag{2.30}$$

este último resultado es la *Formula de Difracción de Fresnel-Kirchhoff.*

La ecuación (2.30) esta limitada, ya que para obtenerla se tienen que imponer las condiciones de contorno de Kirchhoff tanto al campo incidente como a su derivada parcial, esta limitación fue solucionada con la *Teoría de Rayleigh-Sommerfeld.*

Para hallar la F*ormula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld,* supongamos que la función G es generada por una fuente puntual localizada en el punto P_0, y al mismo tiempo por una segunda fuente puntual en el punto P'_0 que es la imagen de P_0 reflejada en el lado opuesto de la pantalla. Ambas fuentes emiten con la misma longitud de onda pero con una diferencia de fase de 180°. En este caso la función de Green esta dada por:

$$G_{-}(P_1)=\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}-\frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \quad . \tag{2.31}$$

Una alternativa e igualmente válida función de Green se obtiene si consideramos que las dos fuentes están emitiendo en fase, en este caso:

$$G_{+}(P_1)=\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}+\frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \quad . \tag{2.32}$$

Considerando que $r_{01} >> \lambda$, la derivada parcial respecto de la normal de la ecuación (2.31) es:

$$\frac{\partial G_{-}(P_1)}{\partial n}=2\mathrm{ik}\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad . \tag{2.33}$$

Sustituyendo (2.31) y (2.33) en la ecuación (2.25) y aplicando las condiciones de contorno de Kirchhoff únicamente a U llegamos a:

$$U_I(P_0)=\frac{1}{i\lambda}\iint_S U(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,dS \quad , \tag{2.34}$$

si empleamos la ecuación (2.23) obtenemos el resultado siguiente:

$$U_{II}(P_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\partial U(P_1)}{\partial n}\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}dS \quad , \tag{2.35}$$

finalmente, si consideramos que la abertura es iluminada por una onda esférica que diverge desde su fuente en una posición P_2

$$U(P_1)=\frac{A e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \quad ,$$

obtenemos:

$$U_I(P_0)=\frac{A}{i\lambda}\iint_S \frac{e^{ik(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}}\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,dS \quad , \tag{2.36}$$

que es la *Formula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld.* Utilizando la ecuación (2.32) obtenemos un resultado similar, pero con signo negativo.

Consideremos ahora la Figura 2.3, en la cual una pantalla opaca esta colocada sobre el plano (ξ,η) y es iluminada en la dirección positiva del eje Z; tomando en cuenta la geometría mostrada en la figura, la ecuación (2.34) puede reescribirse como:

$$U(P_0)=\frac{1}{i\lambda}\iint_\Sigma U(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\cos(\theta)\,dS \quad , \tag{2.37}$$

donde θ es el ángulo entre la normal $\hat{n}$ en dirección exterior y el vector $\vec{r}_{01}$ que va del punto P_0 al punto P_1 *y* Σ ahora representa la superficie *S* sobre la cual se realiza la integral.

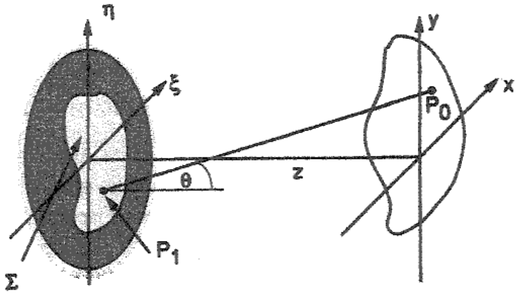

Figura 2.3: Geometría de difracción

notemos que el término coseno esta dado por:

$$\cos\theta = \frac{z}{r_{01}} \quad ,$$

entonces, sustituyendo la expresión anterior en la Ecuación (2.37) y tomando las coordenadas (x, y) y (ξ, η) de los puntos P_0 y P_1 respectivamente:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d(\xi, \eta) \quad , \tag{2.38}$$

donde la distancia r_{01} esta dada por:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad . \tag{2.39}$$

La relación (2.38) puede ser interpretada como la superposición lineal de ondas esféricas que divergen desde un punto (ξ, η) , y es la expresión matemática del *Principio de Huygens-Fresnel*.

2.4 Difracción de Fresnel

Como se ha mencionado, la difracción de tipo Fresnel o de campo cercano, ocurre cuando la fuente de iluminación o el punto de observación (o ambos) se encuentran a una distancia finita (pequeña) con respecto a la abertura.

La expresión matemática que describe este tipo de difracción se obtiene a partir de las ecuaciones (2.38) y (2.39), se inicia reescribiendo la ecuación (2.39) de la siguiente manera:

$$r_{01}=z\sqrt{1+\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2+\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2} \quad , \tag{2.40}$$

aplicando la expansión binomial:

$$\sqrt{1+b}=1+\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}b^2 \quad , \tag{2.41}$$

se hace la siguiente aproximación:

$$r_{01}\approx z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right] \quad , \tag{2.42}$$

al sustituirla en la ecuación (2.29) nos da la expresión para el campo en (x,y):

$$U(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi,\eta)\, e^{\left\{\frac{ik}{2z}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\right\}}\, d\xi\, d\eta \quad , \tag{2.43}$$

si consideramos a:

$$h(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)]} \quad , \tag{2.44}$$

entonces (2.43) se puede escribir como una convolución:

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta \quad , \tag{2.45}$$

donde *h*(*x*,*y*) es el kernel de la convolución. Factorizando el término $e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$ fuera de la integral de la Ecuación (2.43) obtenemos la siguiente expresión:

$$U(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{\infty}\{U(\xi,\eta)e^{i\frac{k}{2z}[\xi^2+\eta^2]}\}e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta \quad , \tag{2.46}$$

La expresión (2.46) es la *Transformada de Fourier* de un campo complejo colocado a la derecha de la abertura y una fase exponencial cuadrática (omitiendo los términos que multiplican a la integral) y es conocida como la *Integral de Difracción de Fresnel.*

2.5 Difracción de Fraunhofer

La difracción de Fraunhofer ocurre cuando la fuente de iluminación y el plano de observación se encuentran a una distancia *z* “muy grande” de la abertura de difracción, en este caso se cumple:

$$z \gg \frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2} \quad , \tag{2.47}$$

de modo que el término de la fase cuadrática de la ecuación (2.46) es aproximadamente igual a la unidad, es decir:

$$e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \approx 1 \quad , \tag{2.48}$$

con lo que obtenemos la *Integral de Difracción de Fraunhofer o de campo lejano:*

$$U(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi,\eta)\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}\, d\xi\, d\eta \quad . \tag{2.49}$$

Si nuevamente omitimos los factores de fase que multiplican a la integral, notamos que se trata de la *Transformada de Fourier* de la función $U(\xi,\eta)$ que al igual que en el caso de la ecuación (2.46) representa la distribución del campo que pasa a través de la abertura, mientras que la función $U(x,y)$ es el campo final que se genera en el punto de observación *(x,y).*

2.6 Principio de Babinet

Comenzaremos por definir una abertura como complementaria de otra cuando las partes oscuras de una son transparentes en la otra y viceversa. Dicho de otro modo, si representándolas por dos funciones $U_1(\xi,\eta)$ y $U_2(\xi,\eta)$ se cumple que:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [\, U_1(\xi,\eta)+U_2(\xi,\eta)]\, d\xi = constante \quad , \tag{2.50}$$

por ejemplo, la abertura complementaria de una abertura circular es un disco opaco centrado en el eje y del mismo tamaño de la abertura.

Supongamos ahora que tenemos dos aberturas de forma arbitraria, pero complementarias, que producen patrones de difracción de Fraunhofer

$U_1(x,y)$ y $U_2(x,y)$. Si $U(x,y)$ es la amplitud producida sobre la pantalla de observación, en ausencia de cualquier pantalla difractora, el principio de Babinet dice que:

$$U(x.y)=U_1(x,y)+U_2(x,y) \quad . \tag{2.51}$$

Este resultado es válido tanto para difracción de Fresnel como para difracción de Fraunhofer.

2.7 Funciones Hipocicloides

Una *hipocicloide* es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda *interiormente*, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija[7].

Se deducen las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide en el caso en que la circunferencia fija tiene su centro en el origen y la posición del punto que describe la curva está sobre la parte positiva del eje X y sobre la circunferencia fija, como se ve en la Figura 2.4:

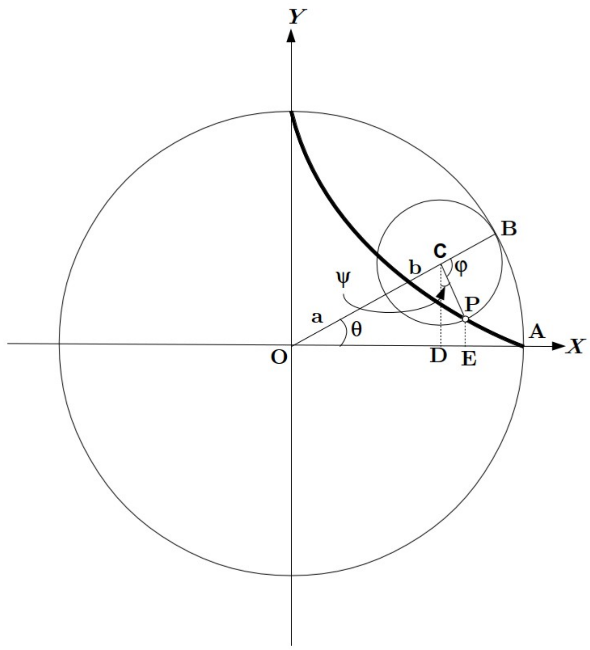

Figura. 2.4: Geometría auxiliar para la deducción de las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico; sean a y b, respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y sea C el centro de la circunferencia rodante o generatriz. Se considera como parámetro el ángulo θ que forma la recta de los centros OC con la parte positiva del eje X. Sea A el punto sobre el eje X que representa la posición inicial del punto P que describe la curva hipocicloide, y sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias. Desde C y P bajemos las perpendiculares CD y PE, respectivamente, al eje X. Llamemos φ al ángulo BCP y ψ al ángulo PCD. Consideraremos ambos ángulos medidos en radianes.

Como la circunferencia generatriz rueda, sin resbalar, de A a B, tenemos:

$$arco\,AB = arco\,PB \quad , \tag{2.52}$$

es decir,

$$a\theta = b\varphi \quad , \tag{2.53}$$

así que, $\varphi = \frac{a}{b}\theta$. Y se tiene también:

$$\psi = \pi - \varphi - \text{ángulo}\,OCD = \pi - \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi \quad . \tag{2.54}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} sen\,\psi = sen\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta - \varphi) + sen(\theta - \varphi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow sen(\psi) = \cos(\theta - \varphi) = \cos\left(\theta - \frac{a}{b}\theta\right) \\ \Rightarrow sen(\psi) = \cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right) \end{aligned} \quad , \tag{2.55}$$

y

$$\begin{aligned} \cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta - \varphi) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) sen(\theta - \varphi) \\ \Rightarrow \cos(\psi) = -sen(\theta - \varphi) \\ \Rightarrow \cos(\psi) = -sen\left(\frac{b-a}{b}\theta\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.56}$$

Para las coordenadas (x,y) del punto P, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \overline{OC}\cos\theta + \overline{CP}\,sen(\psi) \\ y &= \overline{EP} = \overline{CD} - \overline{CP}\cos(\psi) = \overline{OC}\,sen(\theta) - \overline{CP}\cos(\psi) \end{aligned} \quad . \tag{2.57}$$

Pero, notemos que $\overline{OC} = a - b$, $\overline{CP} = b$ y sustituyendo las expresiones encontradas para el seno y el coseno de ψ obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= (a-b)\cos(\theta) + b\cos\left(\frac{b-a}{b}\theta\right) \\ y &= (a-b)\,sen(\theta) - b\left[-sen\left(\frac{b-a}{b}\theta\right)\right] \end{aligned} \quad . \tag{2.58}$$

Si ahora consideramos que el seno es una función impar y el coseno es una función par, es decir: $sen(x) = -sen(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$ obtendremos finalmente las ecuaciones paramétricas para una hipocicloide:

$$\begin{aligned} x &= (a-b)\cos(\theta) + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \\ y &= (a-b)\,sen(\theta) - b\,sen\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.59}$$

Sea k la razón de a a b, de modo que a=kb. Si k es un número entero, tendremos una *hipocicloide de k picos*. Por ejemplo, si tenemos que k=3 obtendremos la hipocicloide llamada *Deltoide* (su forma es parecida a la letra griega delta mayúscula) o *Tricúspide*, (ver figura 2.5a)) , la cual fue concebida primero por Leonhard Euler, matemático suizo (1707-1783), en 1745 en relación con un estudio de curvas caústicas y posteriormente investigada en 1856 por otro matemático suizo: Jakob Steiner (1796-1863); por lo que a veces es llamada también hipocicloide de Steiner.

Otro ejemplo es el caso para el cual k=4, bajo esta condición la curva descrita por las ecuaciones (2.48) es la llamada *Astroide,* Figura 2.5b). Esta curva fue descubierta por el astrónomo danés Olaf Roemer en su búsqueda por mejorar los dientes de los engranes. Naturalmente aumentando el valor de k aumenta el número de picos que tiene la hipocicloide, así por ejemplo el inciso c) de la Figura 2.5 muestra la hipocicloide obtenida para un valor de k=*6*.

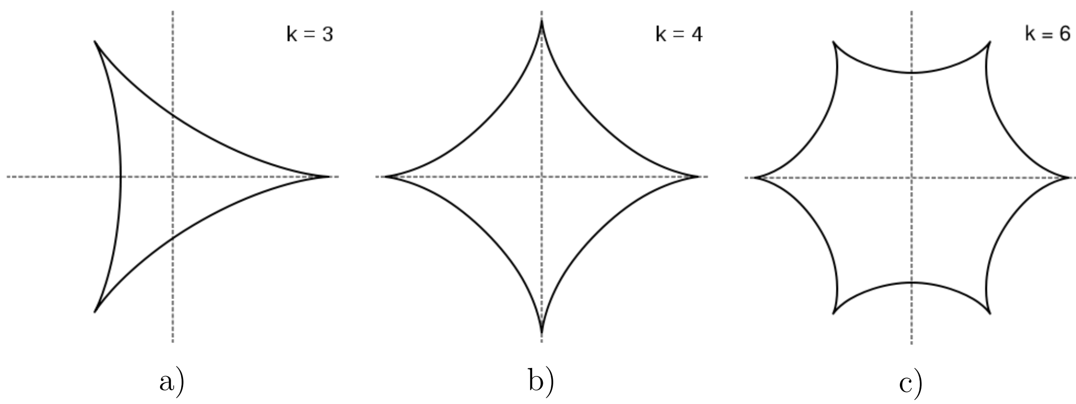

Figura 2.5: Ejemplo de figuras hipocicloides: a) Deltoide, b) Astroide y c)hipocicloide de 6 picos

Capítulo 3

Resultados Experimentales

En el presente capítulo se muestran las distribuciones transversales de intensidad generadas en la región de Fraunhofer, las cuales fueron obtenidas con aberturas de tipo hipocicloide y aberturas de tipo poligonal, correspondientes a los casos en que las mascarillas dejan pasar la luz por toda la abertura y cuando pasa solo por el contorno de la figura. Estos resultados serán comparados en el capítulo siguiente con las distribuciones obtenidas numéricamente.

3.1 Arreglo Experimental

Para generar las distribuciones transversales de intensidad de los diferentes patrones de difracción se emplearon mascarillas con dos tipos de aberturas: unas con forma de hipocicloide y otras con aberturas de forma poligonal. Además, para cada tipo de abertura se consideraron dos casos: que la luz pasara a través de toda la figura o que la luz pasara solo por el contorno, así que al final se emplearon dos mascarillas con la misma abertura pero con características diferentes; por ejemplo, se diseñaron dos mascarillas con abertura en forma de triángulo (polígono de 3 lados) una con la superficie de la figura transparente Figura 3.1a) y otra en la que la parte trasparente es sólo el contorno del triángulo Figura 3.1b).

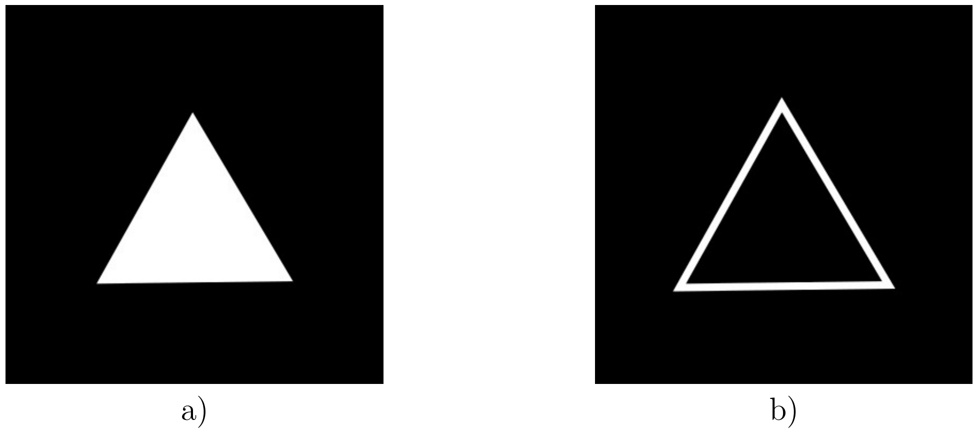

Figura 3.1: Mascarillas con aberturas de tipo triangular

Para ambos casos (hipocicloides y polígonos) se comenzó con un número de lados igual a tres (deltoide y el triangulo) y se fue aumentando el número de uno en uno hasta llegar a diez lados en cada caso.

Las mascarillas de tipo hipocicloide fueron diseñadas a partir de la curva resultante al gráficar las ecuaciones (2.59), dichas gráficas se realizaron en el programa GeoGebra. Luego cada curva resultante fue manipulada mediante el Editor de Gráficos Vectoriales Inkscape, el cual nos permite dar las dimensiones deseadas (como el ancho de linea y radio de la figura) para el experimento. El diámetro de cada hipocicloide empleada es de $d=(1\pm0.05)\,mm$ y el ancho de línea (el contorno de cada figura) es de $a=(100\pm0.2)\,\mu m$. Un ejemplo de las mascarillas con abertura en forma de hipocicloide se muestra a continuación:

a) b)

Figura 3.2: Mascarillas con abertura de tipo hipocicloide

La Figura 3.2 corresponde a las mascarillas con aberturas en forma de hipocicloide de 3 picos o deltoide, en el caso a) toda la figura deja pasar la luz y en el caso b) sólo pasa por el contorno.

En el otro caso, es decir, las mascarillas con abertura en forma de polígonos fueron diseñadas a partir de polígonos generados mediante el Editor de Gráficos Vectoriales Inkscape y manipulando sus dimensiones con éste mismo programa. Las aberturas empleadas para estas mascarillas tienen las mismas dimensiones que las del caso anterior: diámetro $d=(1\pm 0.05)mm$ y ancho $a=(100\pm 0.2)\mu m$. La Figura 3.1 muestra un ejemplo de las mascarillas de este tipo.

Las mascarillas fueron iluminadas con un Láser de He-Ne emitiendo a $632nm$, filtrado mediante un sistema formado por un expansor de 10X y un pinhole de $25\mu m$ y colimado con una lente de $35mm$ de longitud focal y $2.54cm$ de diámetro. Cada mascarilla fue colocada delante de la lente de colimación y sobre el plano focal anterior de una lente plano-convexa de $40cm$ de longitud focal y $2.54cm$ de diámetro. Las imágenes de las distribuciones de intensidad fueron obtenidas mediante una cámara CCD (blanco y negro) colocada en el plano posterior de la última lente mencionada. El esquema del arreglo experimental empleado se muestra en la Figura 3.3.

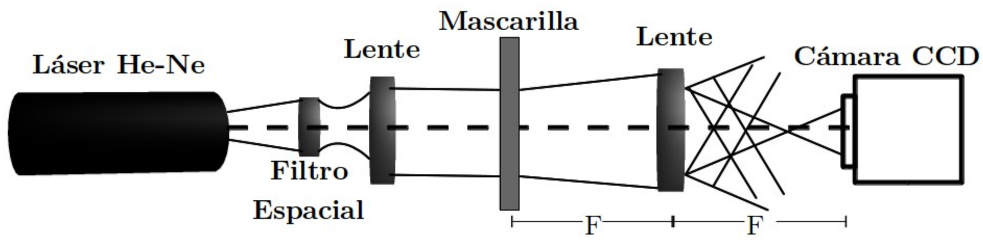

Figura 3.3: Arreglo experimental para obtener las distribuciones transversales de intensidad en la región de Fraunhofer.

3.2 Patrones de Difracción

En la presente sección se muestran las distribuciones transversales de intensidad obtenidas experimentalmente mediante el arreglo mostrado en la Figura 3.3, empleando las mascarillas diseñadas, como se mencionó en la Sección 3.1. Las imágenes están agrupadas de acuerdo al número de lados de las aberturas.

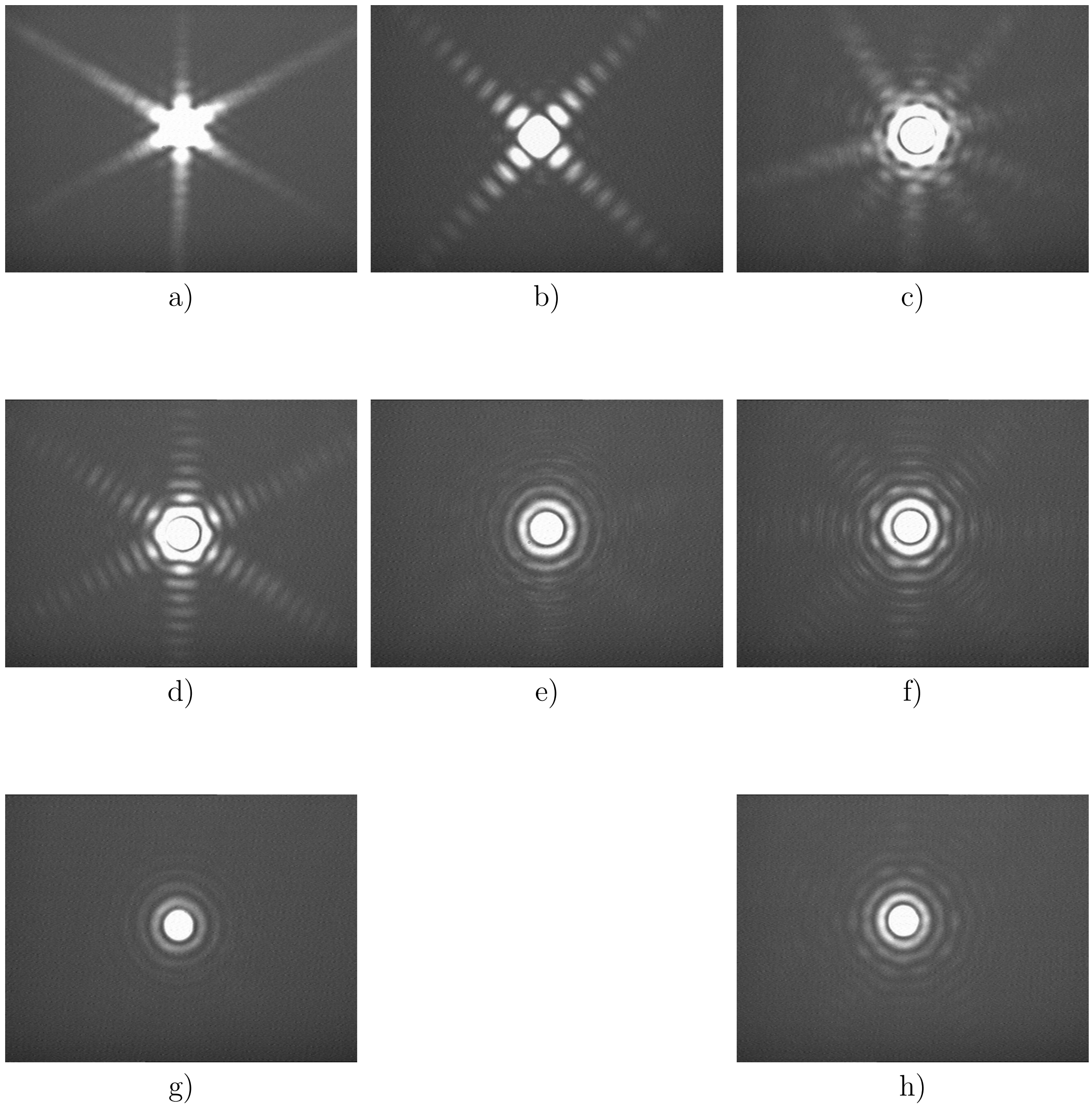

Figura 3.4: Distribuciones de intensidad obtenidas experimentalmente para el caso de aberturas poligonales, en todos los casos se considera que la abertura es toda la superficie de la figura. Los polígonos considerados son: a)triángulo, b)rombo, c)pentágono, d)hexágono, e)heptágono, f)octágono, g)eneágono y h)decágono.

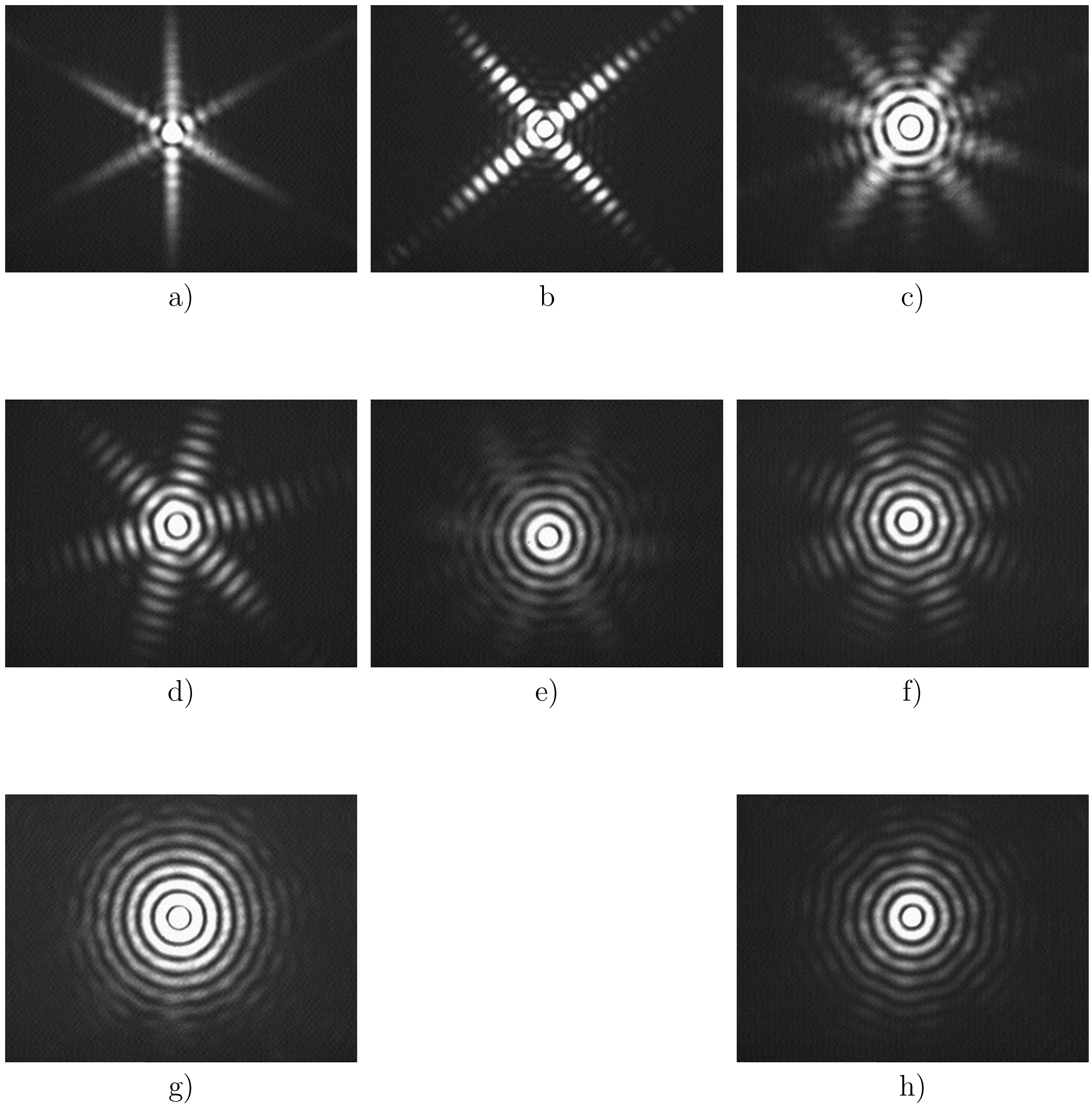

Figura 3.5: Distribuciones de intensidad obtenidas experimentalmente para el caso de aberturas poligonales, en todos los casos se considera que la abertura es sólo el contorno de la figura. Los polígonos considerados son: a)triángulo, b)rombo, c)pentágono, d)hexágono, e)heptágono, f)octágono, g)eneágono y h)decágono.

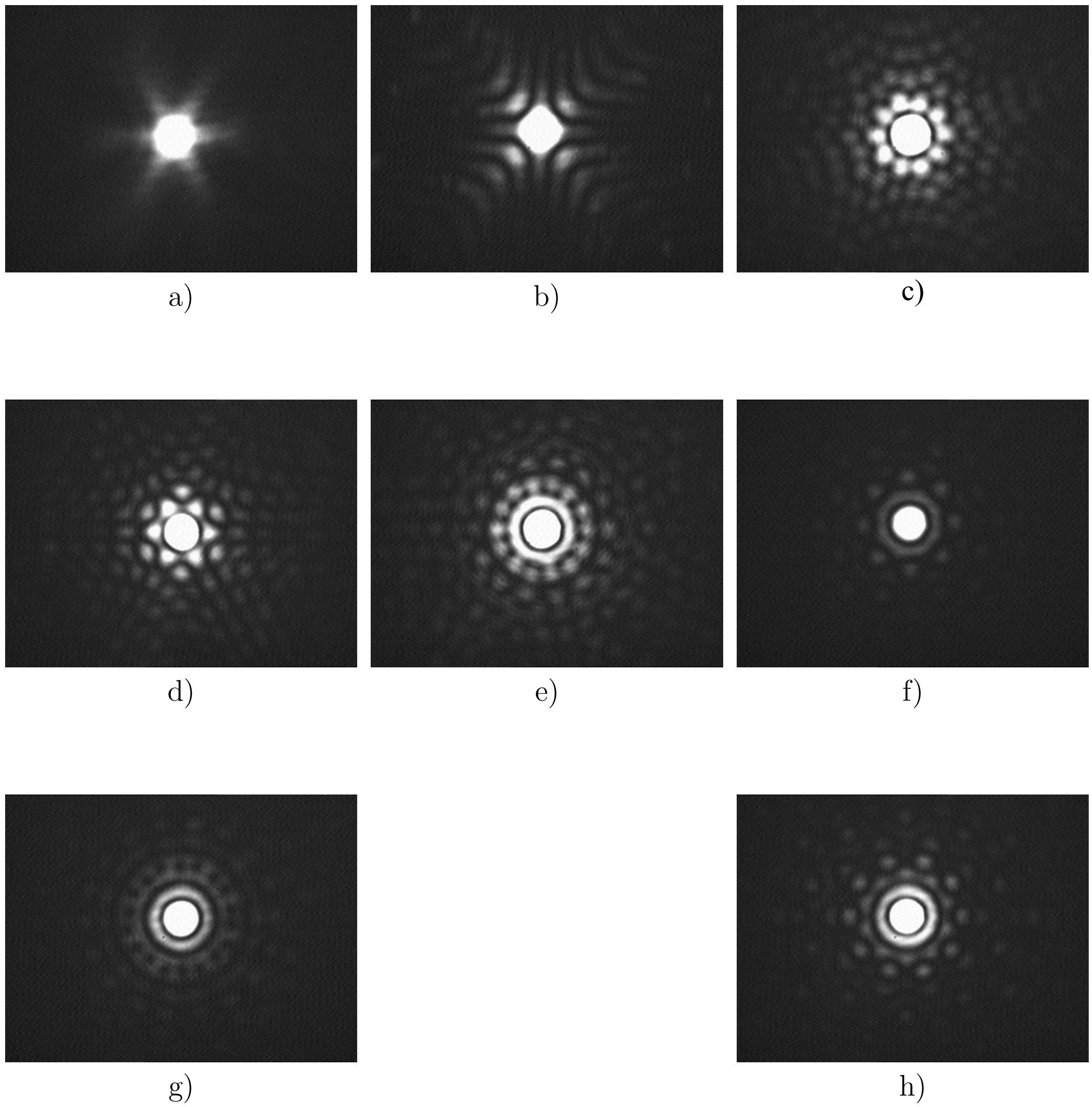

Figura 3.6: Distribuciones de intensidad obtenidas experimentalmente para el caso de aberturas con forma de hipocicloides, en todos los casos se considera que la abertura es toda la superficie de la figura. El número de lados de las hipocicloides consideradas son: a)3 lados, b)4 lados, c)5 lados, d)6 lados, e)7 lados, f)8 lados, g)9lados y h)10 lados.

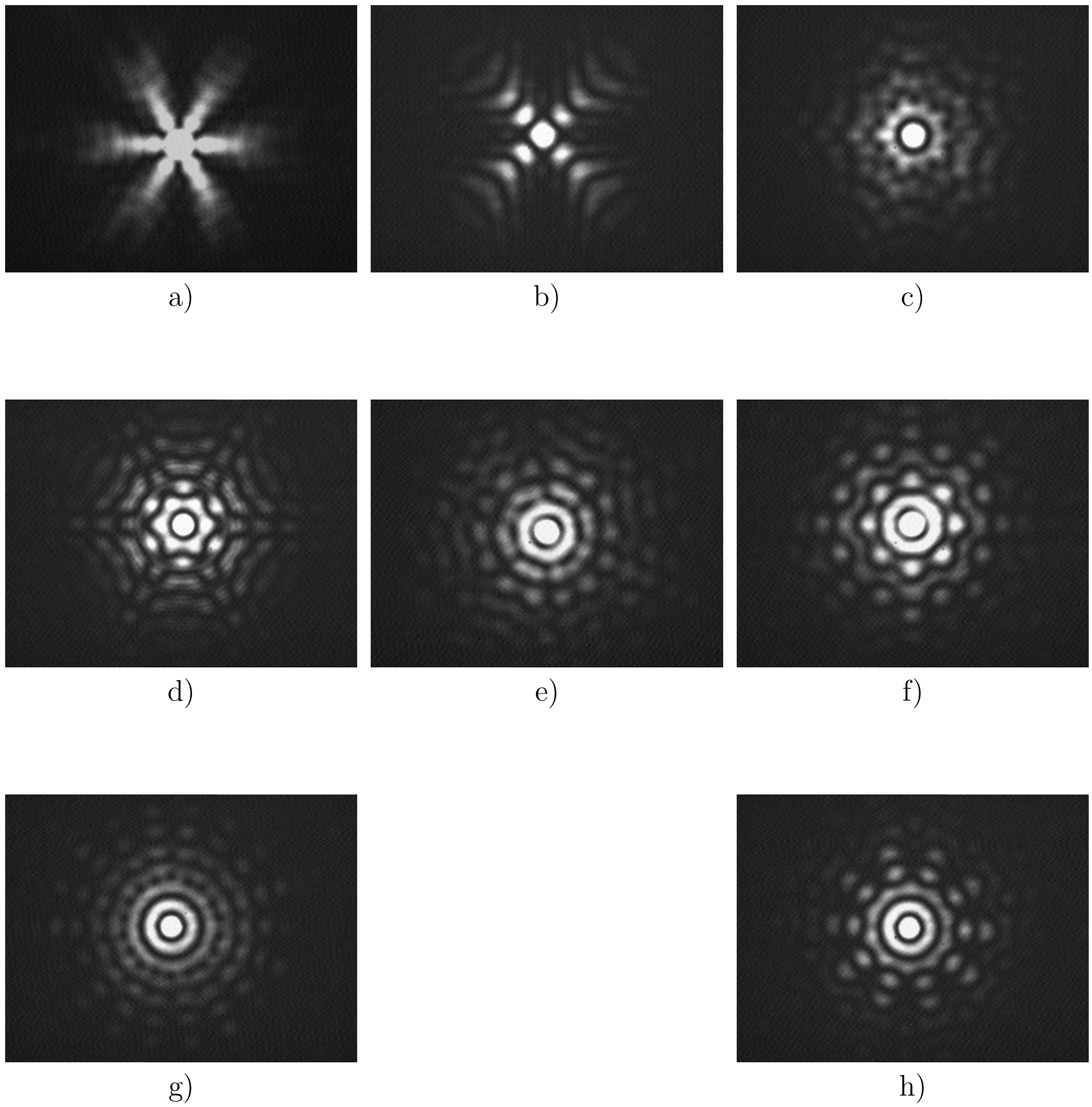

Figura 3.7: Distribuciones de intensidad obtenidas experimentalmente para el caso de aberturas con forma de hipocicloides, en todos los casos se considera que la abertura es sólo el contorno de la figura. El número de lados de las hipocicloides consideradas son: a)3 lados, b)4 lados, c)5 lados, d)6 lados, e)7 lados, f)8 lados, g)9lados y h)10 lados.

3.3 Conclusiones

En las figuras anteriores se muestran los patrones de difracción producidos por mascarillas que tienen una abertura en forma poligonal. De éstas, observamos que las distribuciones de la figura 3.5, correspondientes al caso en que la abertura por la que pasa la luz es sólo el contorno de los polígonos, están mejor definidas que las distribuciones de las mascarillas donde la luz pasa por toda la superficie de los polígonos, figura 3.4.

Notamos también que las configuraciones de los patrones obtenidos presentan una mancha brillante en el centro y a su alrededor franjas brillantes y obscuras que forman una especie de "picos", donde el número de éstos coincide con el número de lados si el polígono tiene un número de lados par, y es el doble si el número de lados es impar. A partir del pentágono, incisos c) de cada figura, la mancha central comienza a tomar una forma circular y a partir del heptágono, incisos e) de las figuras, se comienza a formar un anillo alrededor de la mancha central, a medida que el número de lados de los polígonos aumenta comienzan a aparecer más anillos (cada vez más circulares), de manera que las distribuciones producidas por un eneágono y un decágono, incisos g) y h), son bastante parecidas a la distribución de una abertura circular. Esto significa que a medida que aumentamos el número de lados en el polígono, el patrón de difracción se acerca cada vez más a un patrón de Airy.

En las figuras 3.6 y 3.7 se presentan los patrones de difracción producidos por mascarillas con aberturas en forma de hipocicloide, nuevamente notamos que al igual que en el caso de los polígonos las distribuciones se definen mejor cuando la abertura es sólo el contorno de la hipocicloide, figura 3.7.

Si comparamos los patrones de las aberturas de 3 y 4 picos, incisos a) y b) de cada figura, con los patrones del triángulo y rombo, incisos a) y b) de las figuras 3.4

y 3.5, notamos que son muy parecidos, la principal diferencia se observa para el caso de 4 lados, donde las franjas de la distribución son curvas y no rectas como en el caso del rombo. A partir de la hipocicloide de 5 picos los patrones obtenidos no son similares a los producidos por los polígonos, en estos casos los “picos” que se observan no están formados por franjas si no por manchas de son de menor intensidad, ya que según se observa la mayor parte de ésta se concentra en el centro del patrón, el cual a partir de la abertura de 5 lados tiende a una forma circular.

Capítulo 4

Descripción Numérica

Una manera de saber si los resultados obtenidos experimentalmente son correctos o no es comparándolos con resultados obtenidos mediante algún programa computacional. Así, en este capítulo se muestran las distribuciones obtenidas numéricamente y se hace la comparación con los resultados obtenidos experimentalmente y que fueron presentados en el capítulo anterior.

4.1 Desarrollo Numérico

Las distribuciones transversales de intensidad numéricas se obtuvieron con el programa GNU Octave al aplicar el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) bidimensional a cada mascarilla. Esto es válido ya que en nuestro caso sólo nos interesa la distribución de intensidad resultante en el campo lejano o región de Fraunhofer y que como se ve en la ecuación (2.49) matemáticamente dicha distribución se obtiene aplicando la Trasformada de Fourier en 2 dimensiones al campo incidente.

4.2 Resultados Numéricos

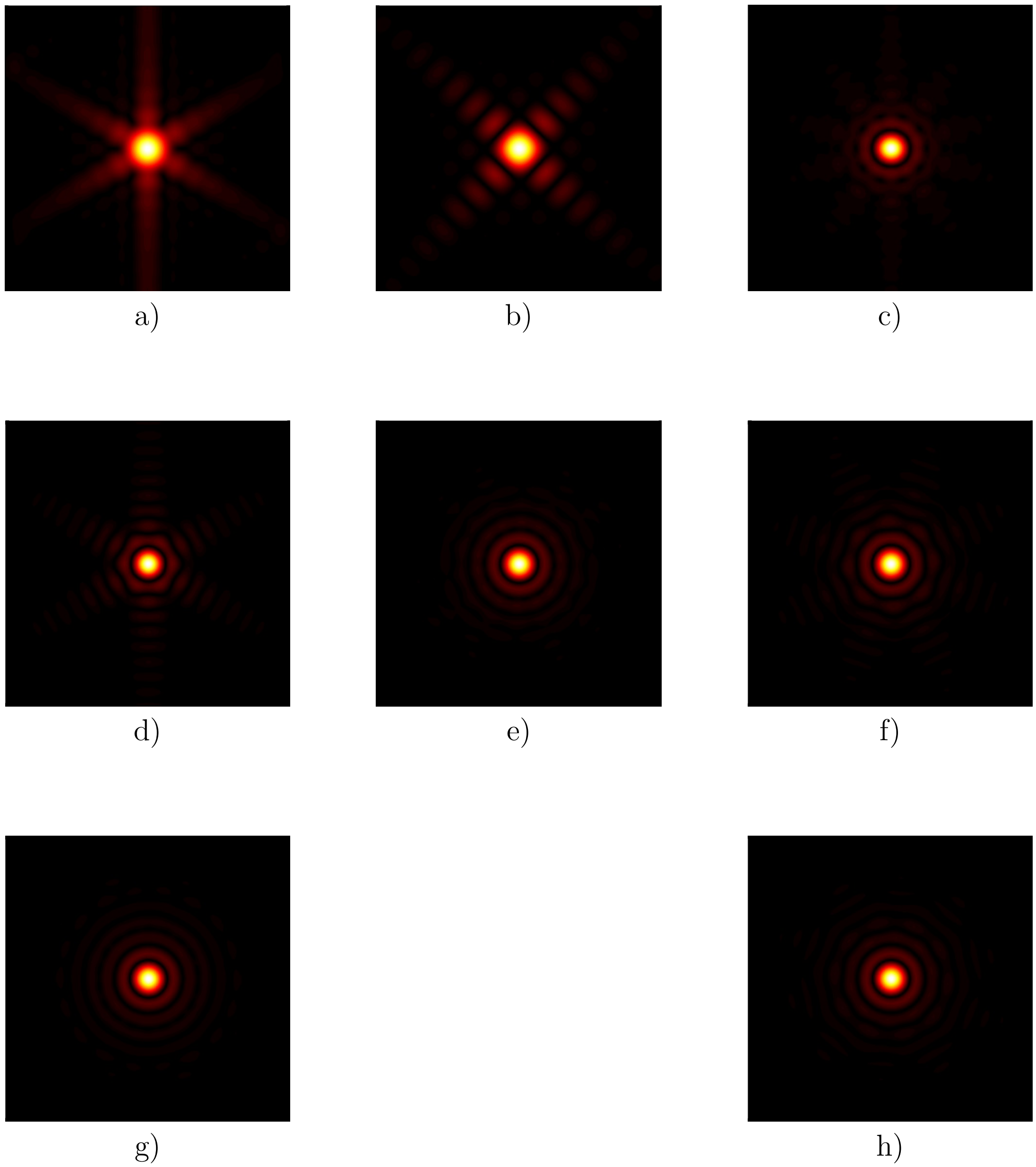

Figura 4.1: Distribuciones de intensidad obtenidas numéricamente para el caso de aberturas poligonales, en todos los casos se considera que la abertura es toda la superficie de la figura. Los polígonos considerados son: a)triángulo, b)rombo, c)pentágono, d)hexágono, e)heptágono, f)octágono, g)eneágono y h)decágono.

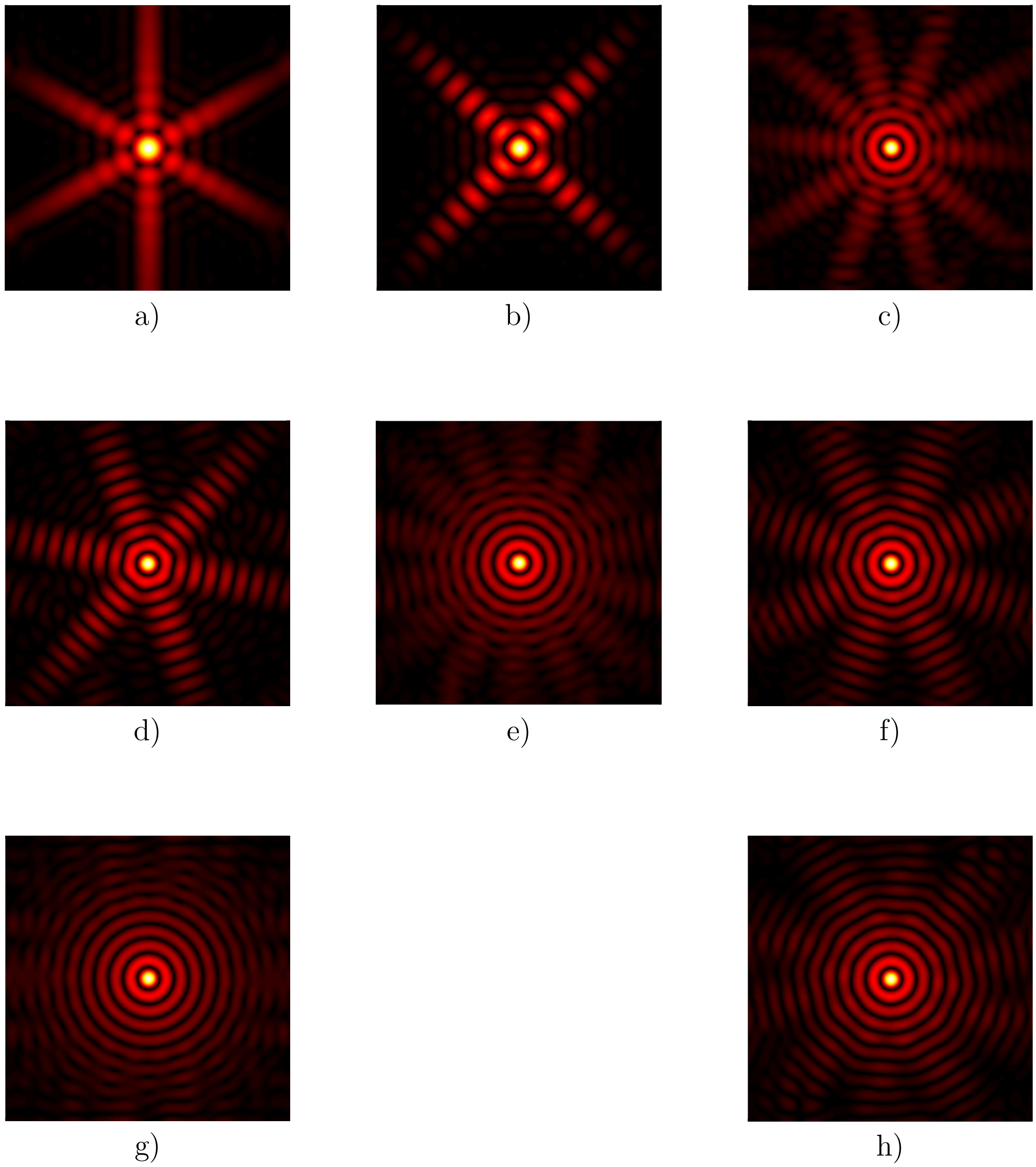

Figura 4.2: Distribuciones de intensidad obtenidas numéricamente para el caso de aberturas poligonales, en todos los casos se considera que la abertura es sólo el contorno de la figura. Los polígonos considerados son: a)triángulo, b)rombo, c)pentágono, d)hexágono, e)heptágono, f)octágono, g)eneágono y h)decágono.

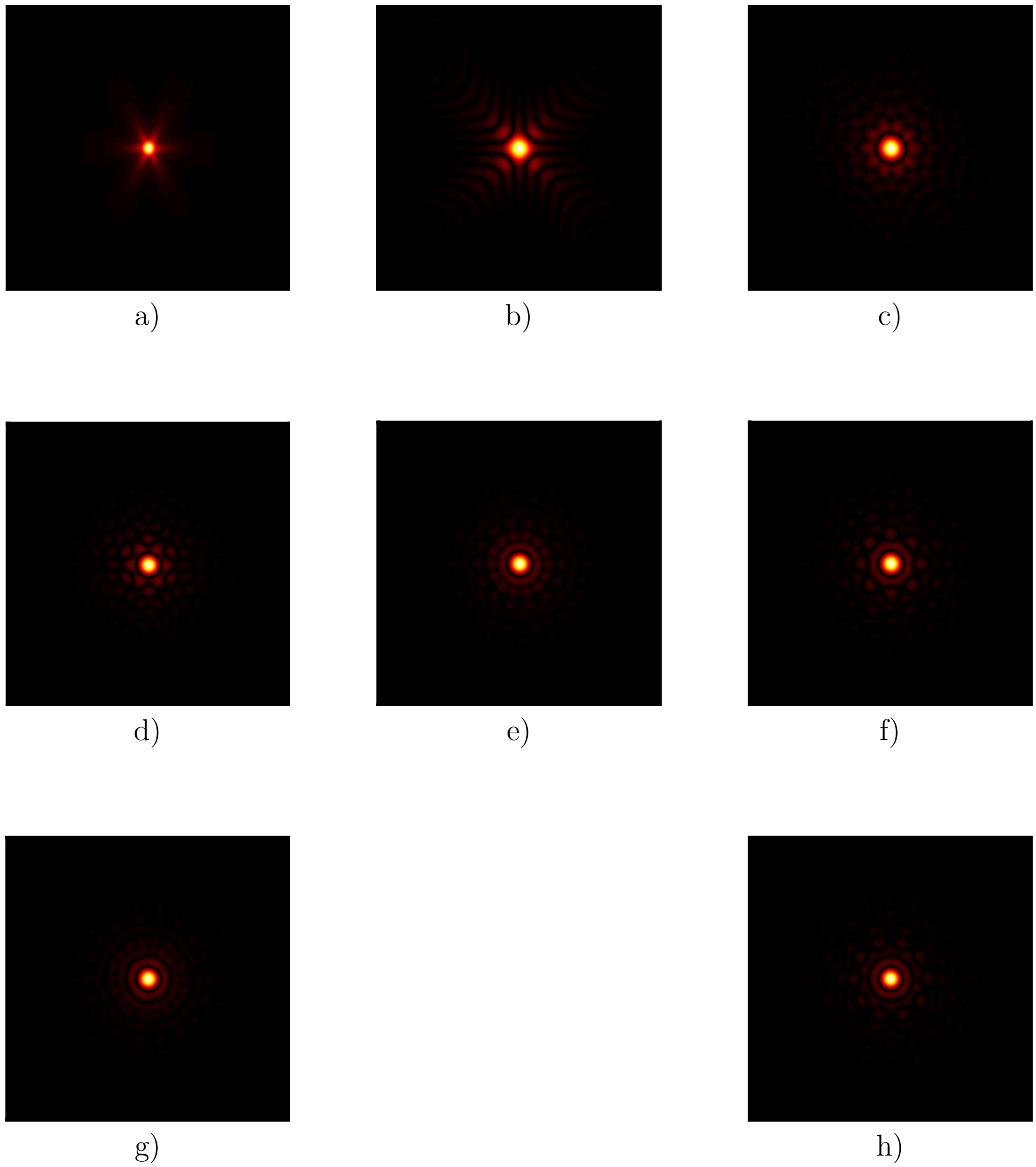

Figura 4.3: Distribuciones de intensidad obtenidas numéricamente para el caso de aberturas con forma de hipocicloides, en todos los casos se considera que la abertura es toda la superficie de la figura. El número de lados de las hipocicloides consideradas son: a)3 lados, b)4 lados, c)5 lados, d)6 lados, e)7 lados, f)8 lados, g)9 lados y h)10 lados.

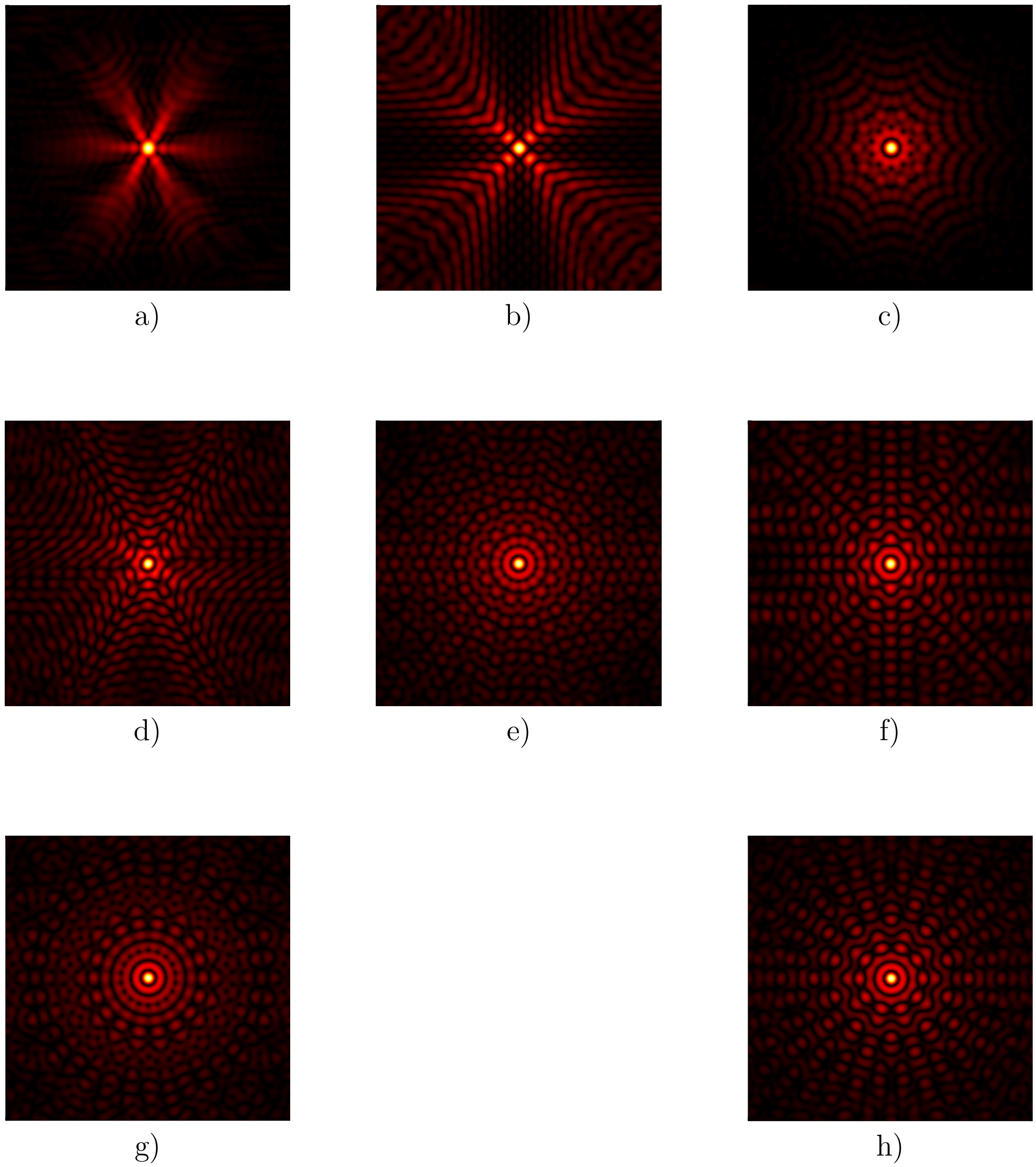

Figura 4.4: Distribuciones de intensidad obtenidas numéricamente para el caso de aberturas con forma de hipocicloides, en todos los casos se considera que la abertura es sólo el contorno de la figura. El número de lados de las hipocicloides consideradas son: a)3 lados, b)4 lados, c)5 lados, d)6 lados, e)7 lados, f)8 lados, g)9lados y h)10 lados.

4.3 Comparación Entre Resultados Experimentales y Numéricos

En esta sección se muestran juntos los resultados obtenidos experimental y numéricamente, éstos se encuentran agrupados de acuerdo al número de lados de cada abertura; así, por ejemplo, la figura 4.3 contiene las distribuciones obtenidas para los cuatro tipos de aberturas de 3 lados considerados en este trabajo. Cada figura consta de 4 columnas y 3 filas, en la primera fila se muestra el tipo de abertura empleada, en la segunda fila las distribuciones experimentales y en la tercer fila las distribuciones numéricas.

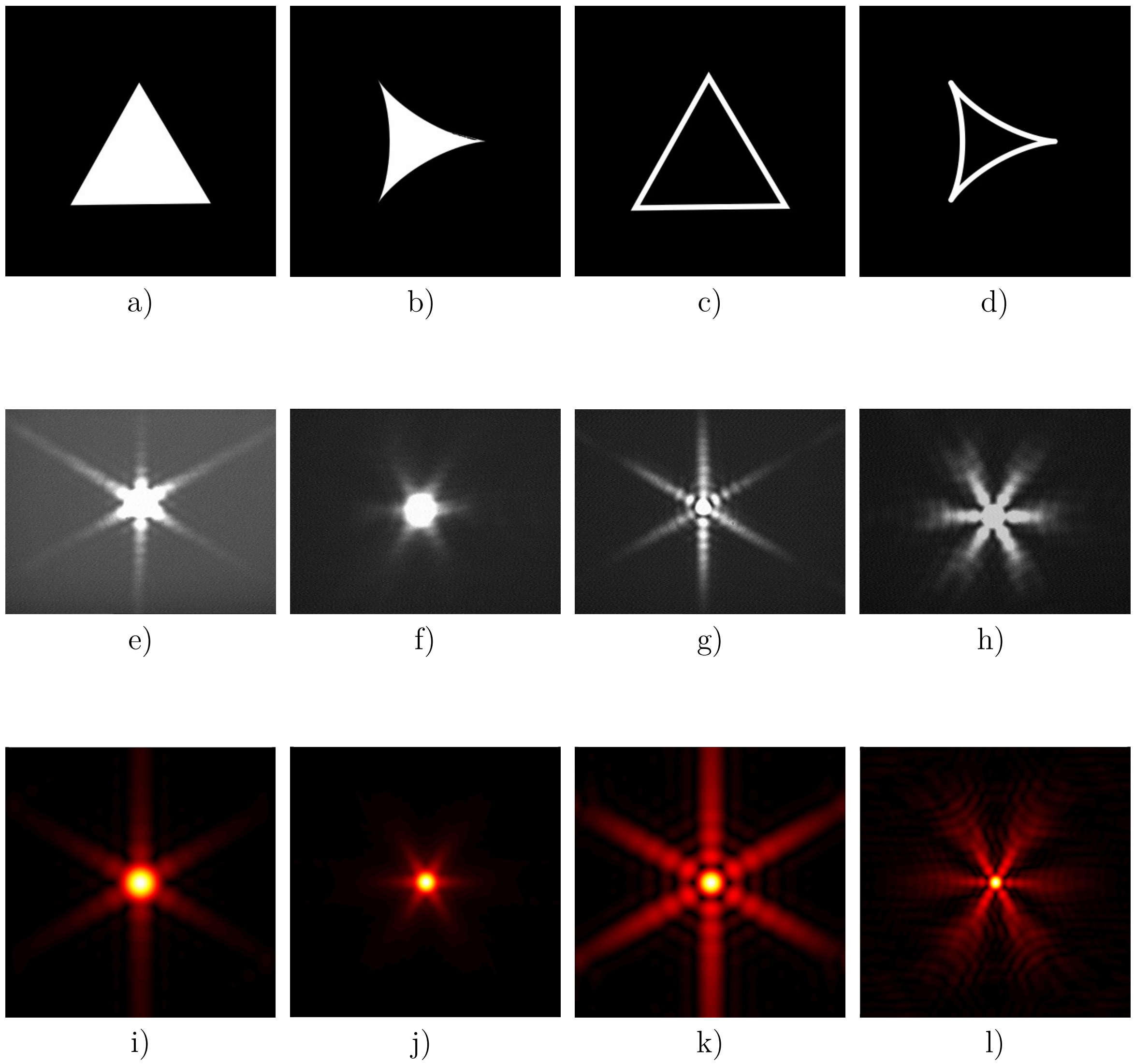

Figura 4.5: Aberturas de 3 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

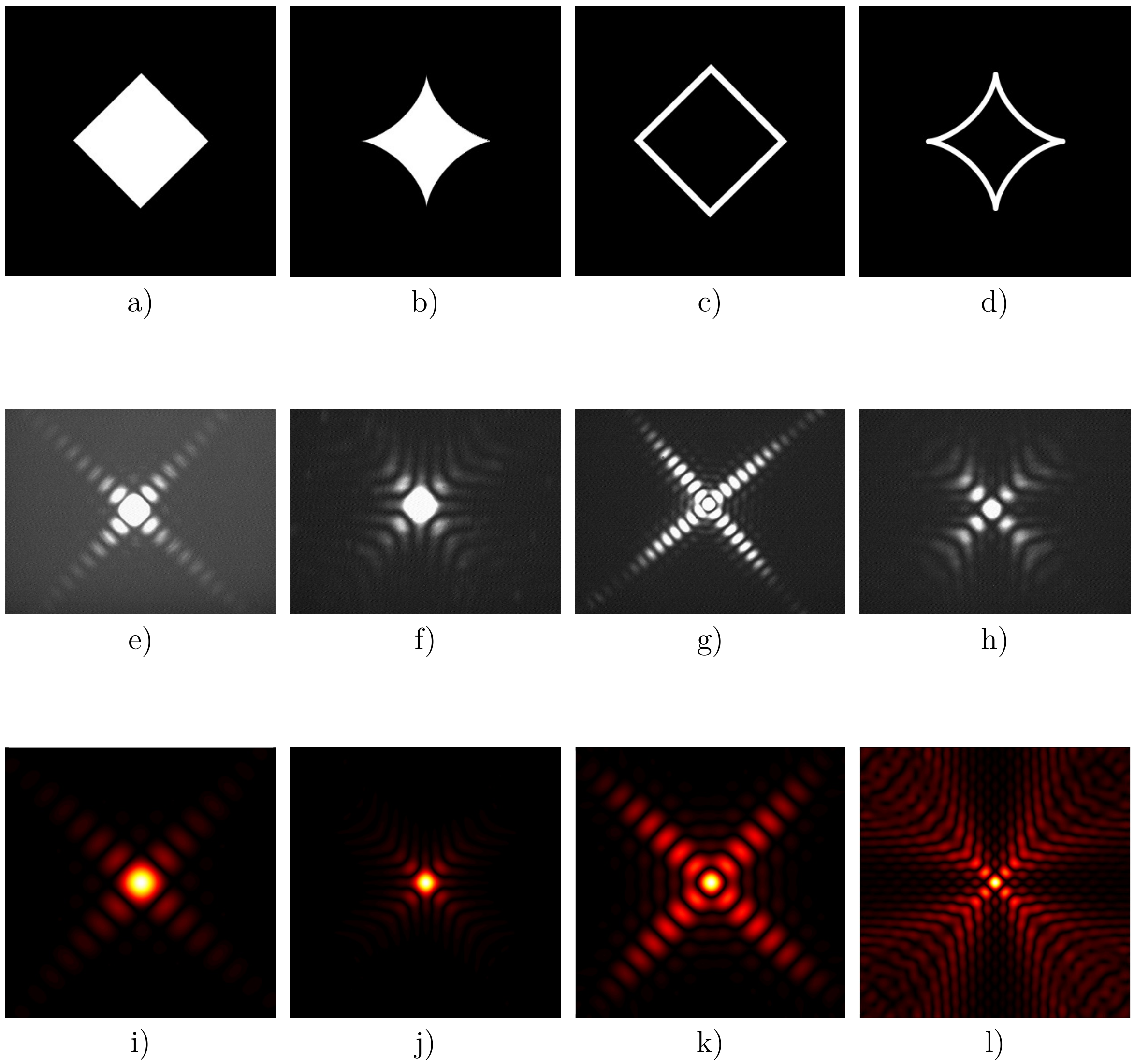

Figura 4.6: Aberturas de 4 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

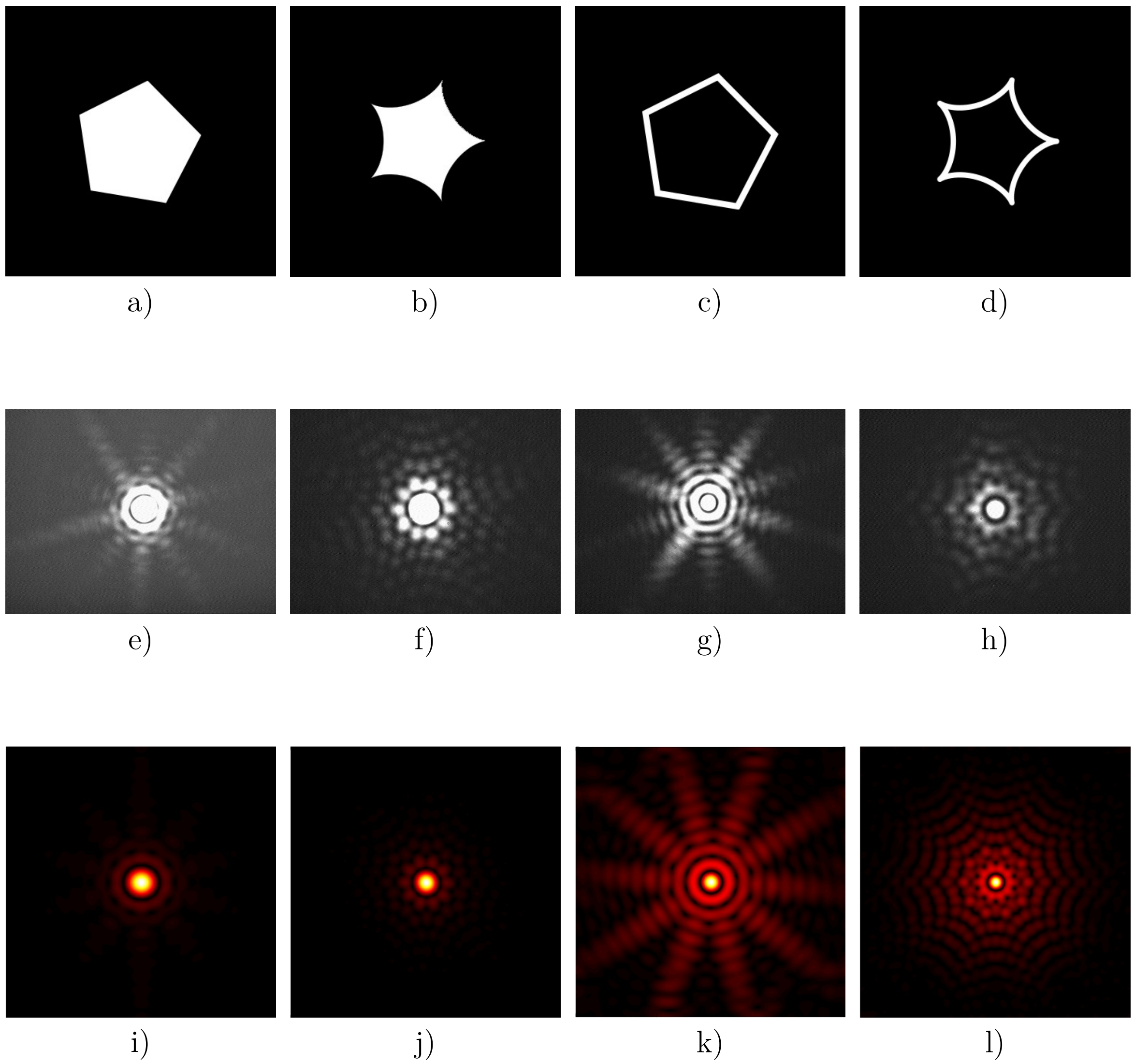

Figura 4.7: Aberturas de 5 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

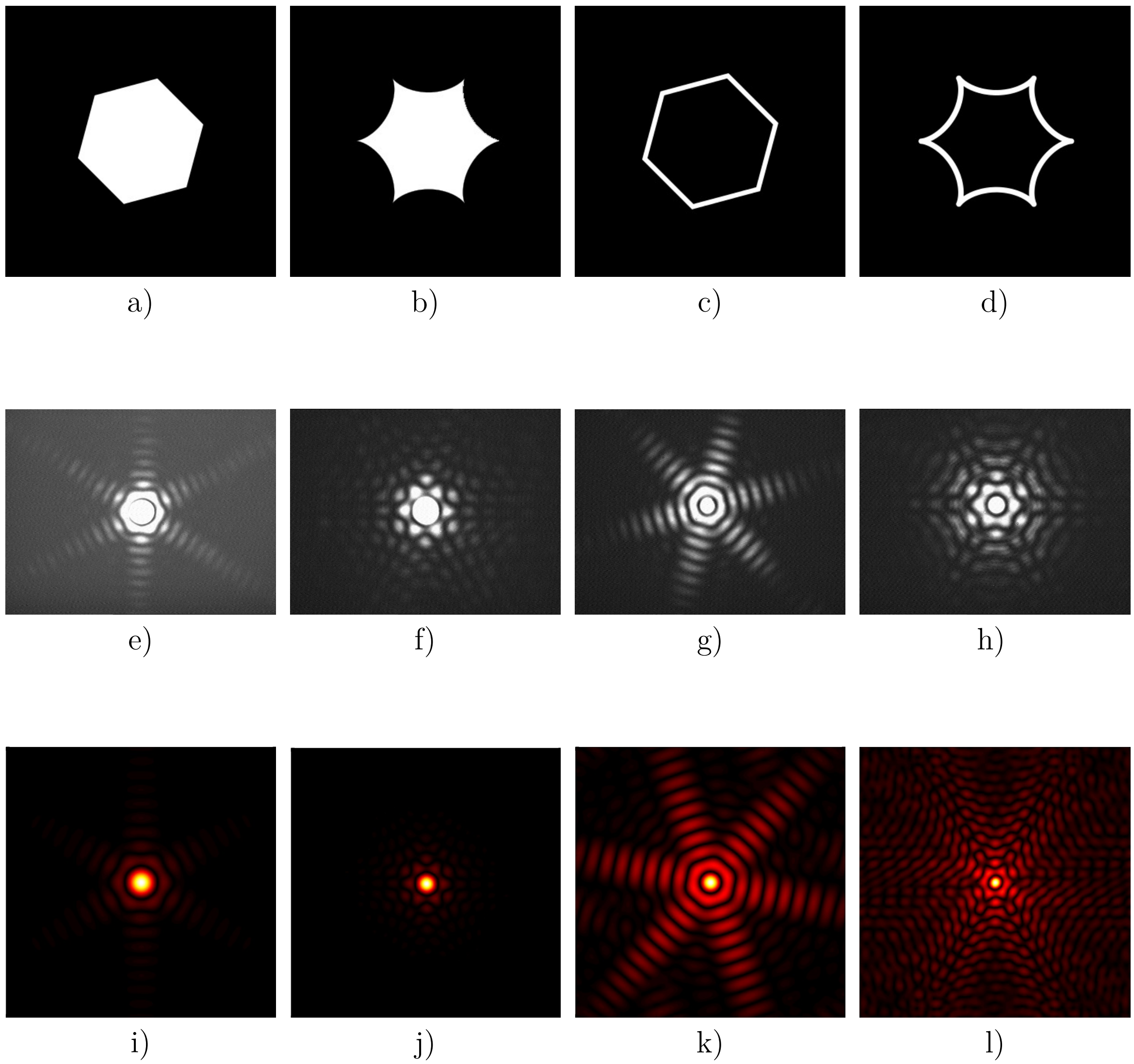

Figura 4.8: Aberturas de 6 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

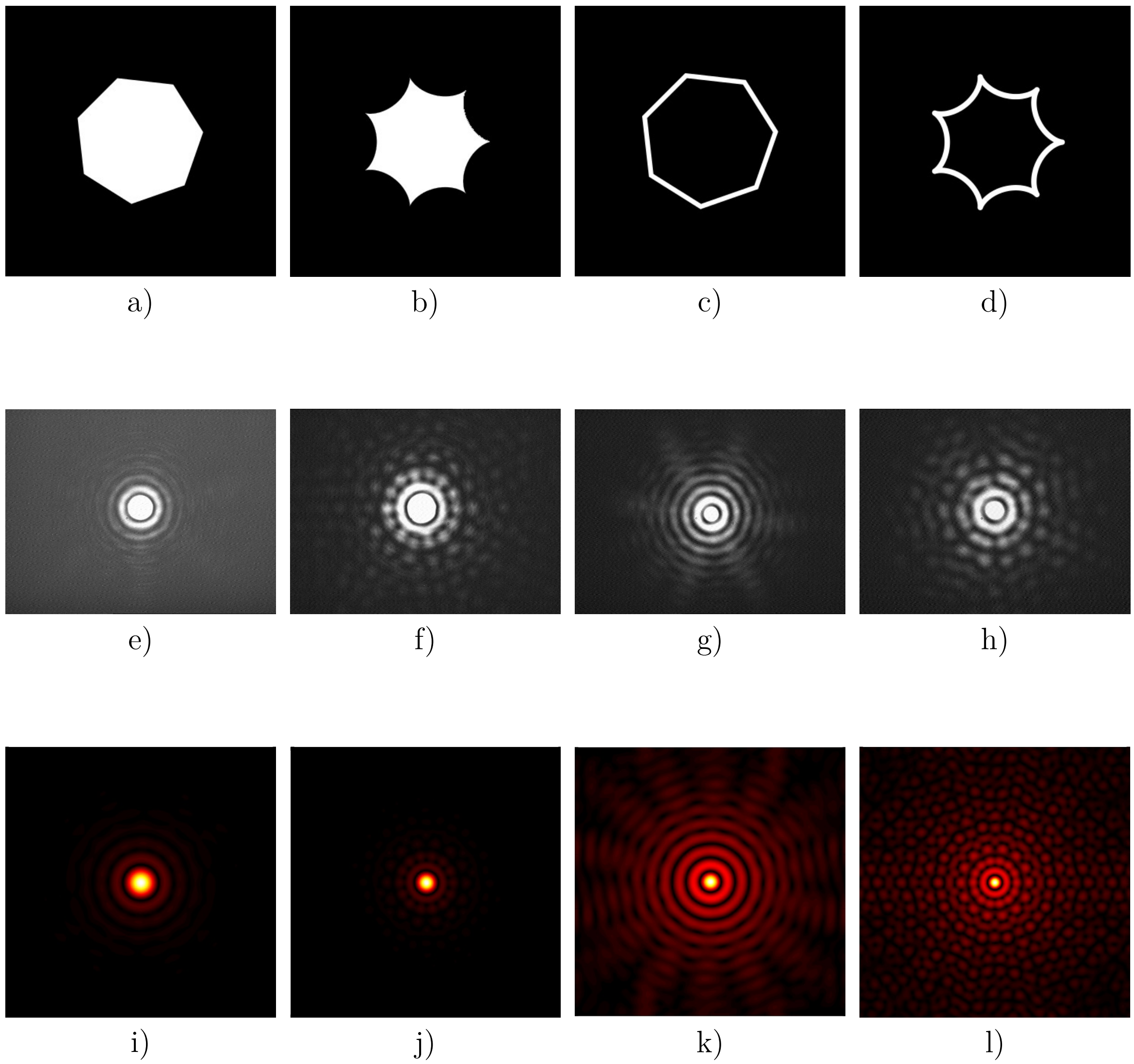

Figura 4.9: Aberturas de 7 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

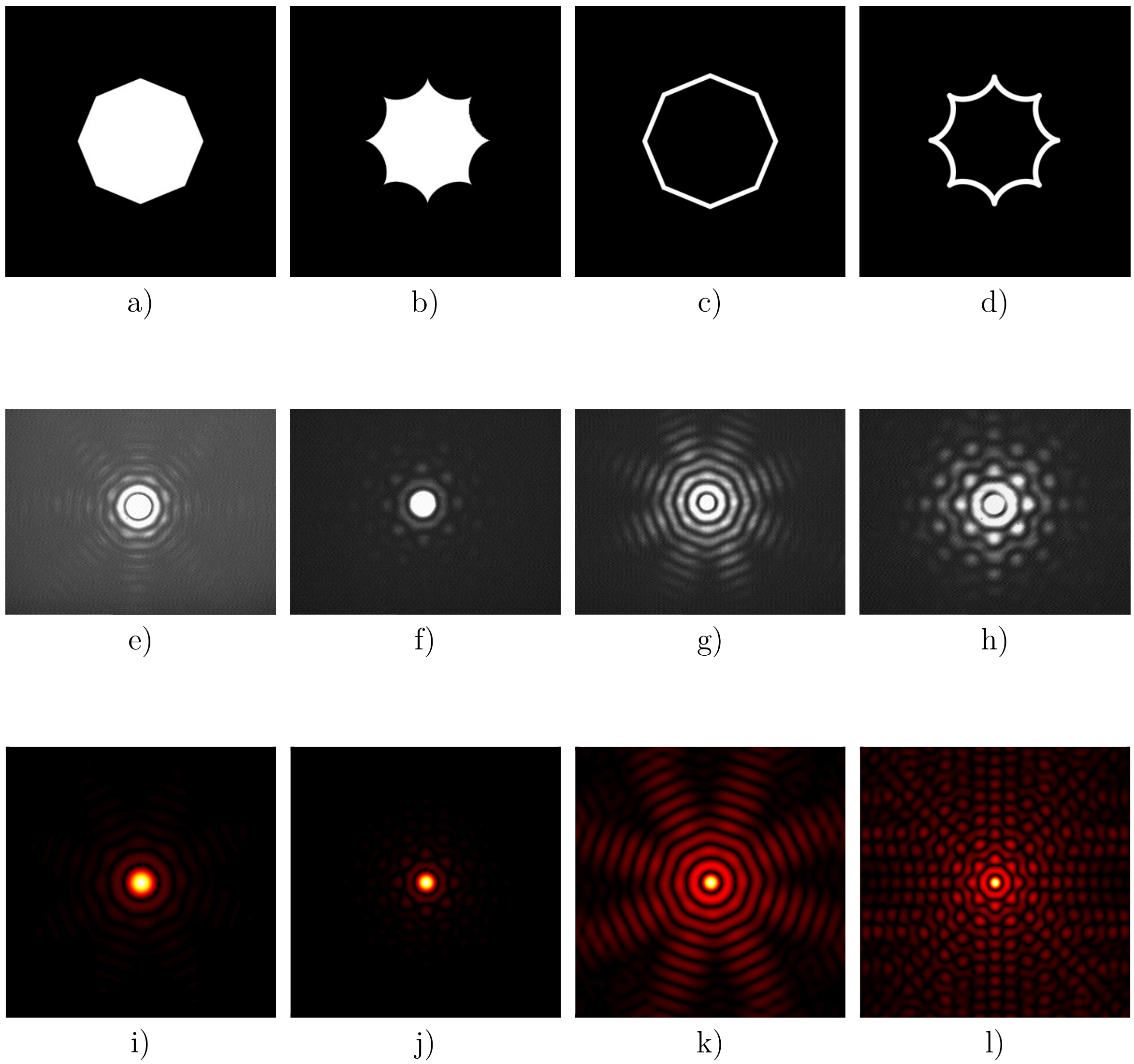

Figura 4.10: Aberturas de 8 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

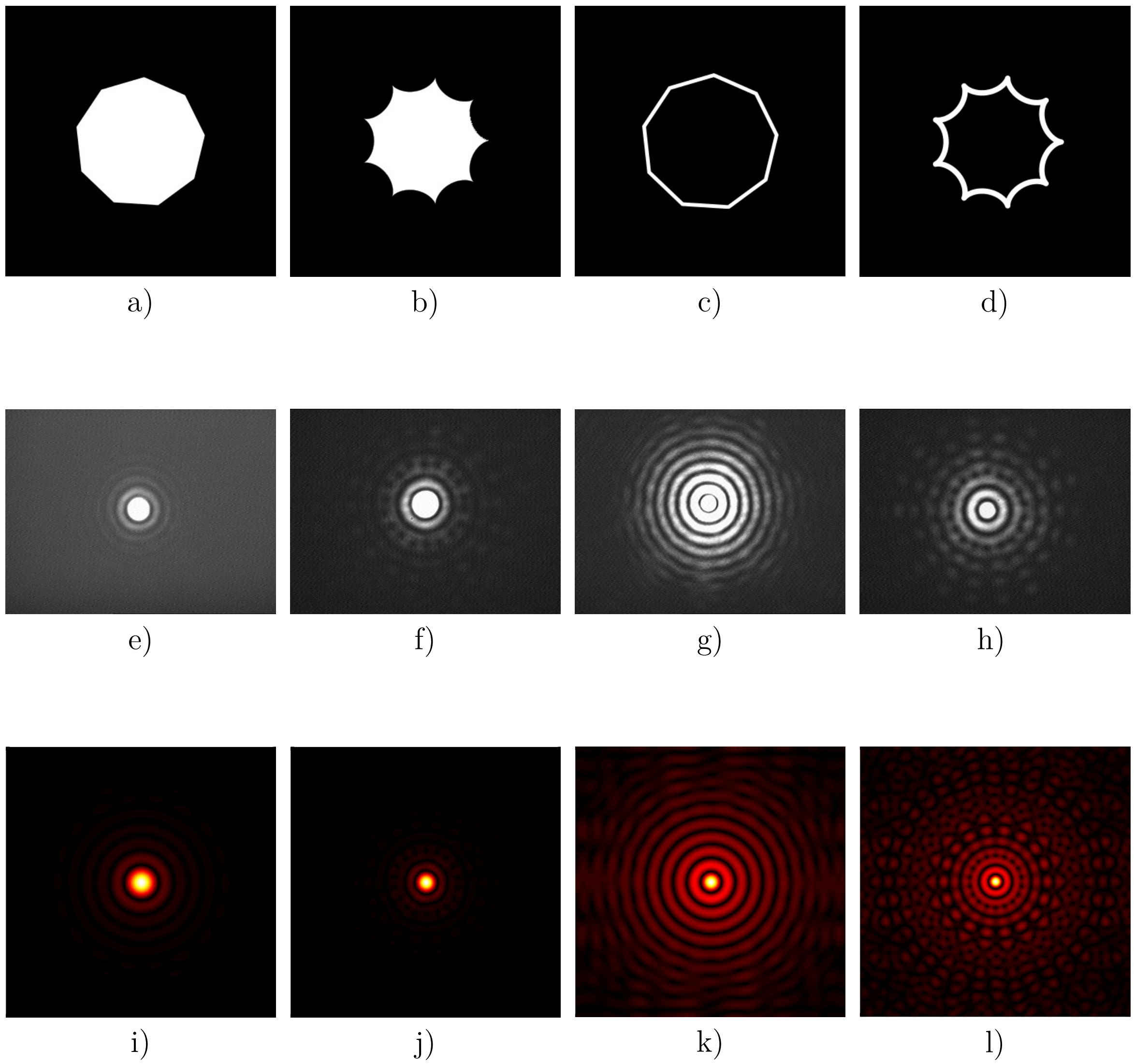

Figura 4.11: Aberturas de 9 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

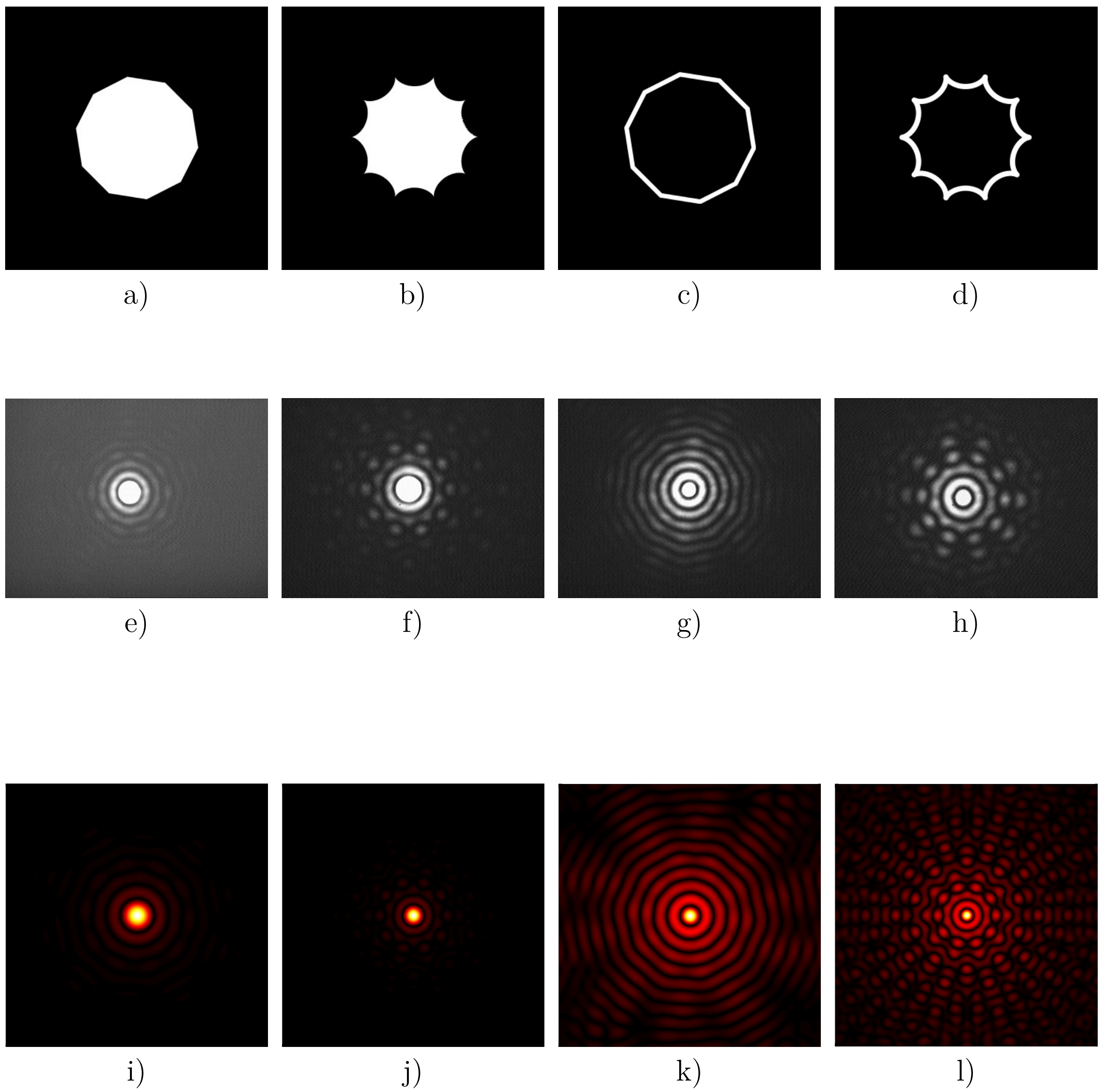

Figura 4.12: Aberturas de 10 lados y distribuciones obtenidas experimental y numéricamente

4.5 Conclusiones

Los resultados obtenidos numéricamente muestran una mayor definición que los obtenidos experimentalmente, esto es de esperarse ya que en una simulación todas las condiciones de un experimento se consideran como “ideales”, lo cual no ocurre en realidad. En las figuras 4.2 y 4.4 que corresponden a los patrones observados cuando la luz pasa sólo por el contorno de polígonos y de hipocicloides respectivamente, notamos que aparecen más franjas y mejor definidas que en el caso experimental. Para el caso de aberturas en forma de polígonos se puede ver de una manera más detallada en el número de “picos” formados por las franjas, figura 4.2, incluso se observa que a medida que aumenta el número de lados del polígono éstos tienden a “doblarse” un poco como se ve en los incisos g) y h) de la misma figura.

En cuanto a los patrones generados por aberturas hipocicloides también vemos que aparece una mayor cantidad de manchas y que están distribuidas de manera simétrica respecto del centro del patrón, figura 4.4.

En las figuras 4.5 a 4.12 se hace finalmente la comparación entre los resultados numéricos presentados en la primera parte de este capítulo y los obtenidos experimentalmente y mostrados en el capítulo anterior. De esta comparación vemos que las distribuciones experimentales son bastante parecidas a las obtenidas mediante la simulación, siendo la única diferencia la resolución de los patrones.

Notamos también que aún con una ligera curvatura en los lados de las aberturas las distribuciones sufren cambios significativos, los cuales se observan más a partir de aberturas de 5 lados.

Capítulo 5

Conclusiones

Las mascarillas con aberturas poligonales e hipocicloides diseñadas para cumplir con los objetivos de este trabajo de tesis no representaron una dificultad considerable en su elaboración, la mayor limitante con la que uno se enfrenta es la resolución de la máquina con la que se imprimen las mascarillas. Con las mascarillas construidas se generaron sus patrones de difracción, los cuales fueron obtenidos para la superficie y el contorno de las figuras poligonales e hipocicloides. Después de realizar la comparación de las diferentes distribuciones de intensidad se concluyó que se obtiene una mayor resolución de la imagen del patrón de difracción cuando la luz pasa a través del contorno de la abertura.

Las diferentes distribuciones de intensidad obtenidas experimentalmente presentan un comportamiento similar en cuanto al número de "picos" que van apareciendo conforme se aumenta el número de lados de la abertura. Observando que el número de lados tanto de los polígonos como de las hipocicloides coincide con el número de picos de los patrones sí la abertura tienen un número de lados par y es del doble si el número es impar, además a medida que aumenta el número de lados de las aberturas los patrones se van pareciendo al producido por una abertura circular.

Para realizar la comparación entre resultados experimentales y numéricos se realizó un programa en GNU Octave, el cuál reproduce satisfactoriamente los resultados experimentales, y se observa de manera más detallada partes de los patrones que no aparecen en el caso experimental debido a la saturación de la cámara CCD con la que se tomaron las fotografías. Finalmente se observa que las distribuciones sufren cambios considerables aún cuando a simple vista las aberturas tienen la misma forma.

TRABAJO A FUTURO

- Obtener una expresión matemática que describa los patrones de difracción de las aberturas hipocicloides.
- Analizar la propagación de los patrones de difracción de aberturas poligonales.
- Analizar la propagación de los patrones de difracción de aberturas hipocicloides.

Bibliografía

[1] Okan K. Ersoy, *"Diffraction Fourier Optics and Imaging"*,Wiley-Interscience A John Wiley & Sons, Inc. Publication, (2007).

[2] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *"Fundamentos de la Teoría Electromagnética,"* Addison-Wesley Iberoamericana, (1986).

[3] E. Hecht, *"Óptica"*, Pearson-Addison Wesley, (2000)

[4] J. W. *"Goodman, Introduction to Fourier Optics"*, McGraw-Hill Companies, Inc., (2000)

[5] J. Komrska, *"Simple derivation of formulas for Fraunhofer diffraction at polygonal apertures"*, J. Opt.Soc.Am./Vol.72,No.10/October 1982.

[6] R. D. Guenther, *"Modern Optics"*, John Wiley & Sons, Inc., (1990

[7] C. H. Lehman, *"Geometría Analítica"*, Editorial Limusa, (1999)

[8] G. Martínez-Niconoff, J. Muñoz-López, J. Silva-Barranco, A. Carbajal-Domínguez, P. Martínez-Vara, "*Self-focusing Transmittances"*, June 1,2012/Vol. 37, No. 11/ OPTICS LETTERS

[9] P. K. Srivastava, *"Optics"*, CBS Publishers & Distributors, (2002)

[10]R. E. English Jr, *"Diffraction theory for polygonal apertures"*, The Institute of Optics University of Rochester, Rochester, New York (1988)