TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

M. en C. María Guadalupe Ordorica Morales

Clasificación de los fluidos

Un *fluido* es una sustancia o medio continuo que se deforma continuamente en el tiempo ante la aplicación de una solicitación o tensión tangencial sin importar la magnitud de ésta.

También se puede definir un fluido como aquella sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

- No Newtonianos:

Un *fluido no newtoniano* es aquél cuya viscosidad varía con la tensión cortante que se le aplica. Como resultado, un fluido no-newtoniano no tiene un valor de viscosidad definido y constante, a diferencia de un fluido newtoniano.

Suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímetros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, Pinturas, suspensiones de arcillas, etc.

- Newtonianos:

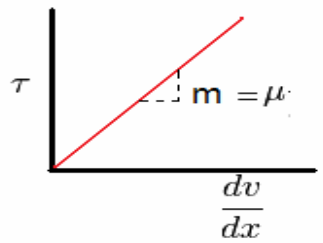
Es un fluido con viscosidad en que las tensiones tangenciales de rozamiento son directamente proporcionales al gradiente de velocidades.

Gases y fluidos de moléculas sencillas, el aire, el agua, la gasolina y algunos aceites minerales.

El gradiente de velocidad en un punto es proporcional al esfuerzo cortante en dicho punto.

$$dv/dx \ \alpha \ \tau \qquad \textit{Ecu. 1}$$

El gradiente de velocidad es proporcional al esfuerzo cortante impuesto al fluido (ver fig 1.4).



Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dx}$$

Fig 1.4 *Representación de la les de Newton de la viscosidad*

Perfil de velocidad en estado estacionario entre dos laminas

- Una vez alcanzado el régimen estacionario es preciso aplicar un fuerza cortante F para conservar el movimiento de la lámina interior. Esta fuerza viene dada por la expresión:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{Y}$$

μ es la viscosidad del fluido

El régimen de flujo esta dado por el número de Reynolds, el cual es adimensional.

$Re = D\, v\, \rho / \mu$ Re < 2100 Flujo laminar
Re > 2100 Flujo turbulento

D = Diámetro de la tubería (m)
V = velocidad del fluido (m/s)
ρ = Densidad del fluido (Kg/m^3)
μ = viscosidad del fluido (m s/ Kg)

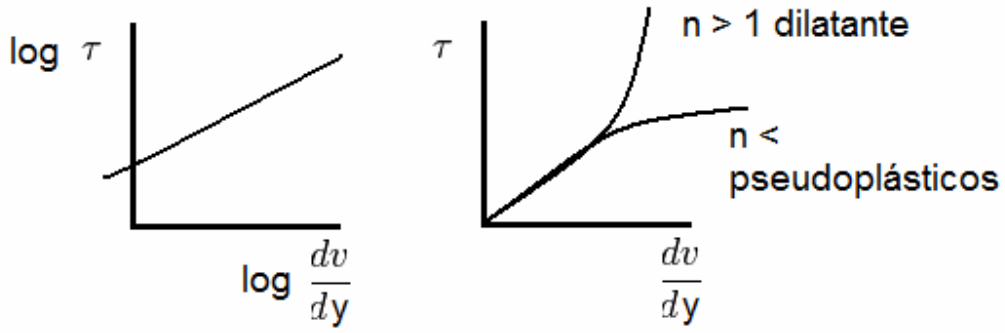
- Plásticos de Bingham la relación de esfuerzo cortante frente al gradiente de velocidad, es lineal pero no pasa del origen.

$$\tau = \tau_0 + \eta\, (dv/dY)$$

τ_0 = Tensión o esfuerzo de fluencia
η = Viscosidad plástica

- Pseudo plásticos y dilatantes que siguen un comportamiento potencial (Fluido de la ley de la potencia) la relación entre esfuerzo cortante y gradiente de velocidad no es lineal.

$$\tau = K\left(\frac{dv}{dy}\right)^n$$



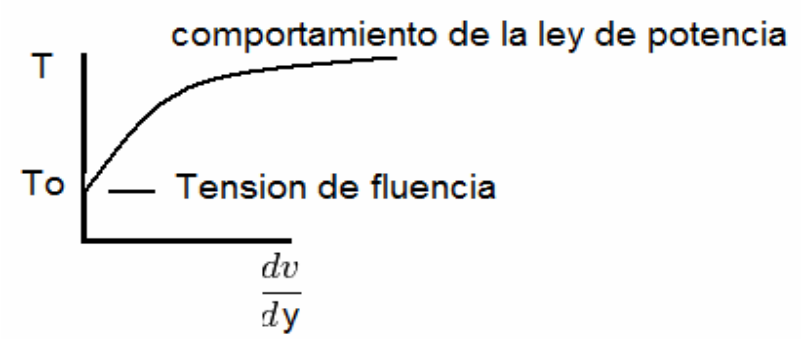
$$\text{Log } \tau = \log K\,(dv/dy)^{\eta}$$

$$\text{Log } \tau = \eta \log K\,(dv/dy)$$

$$\text{Log } \tau = \eta \log K + \eta \log (dv/dy)$$

Plásticos en general tienen características de plásticos de Bingham

$\tau = \tau_0 + K\,(dv/dy)^{\eta}$ η es el indice de comportamiento del fluido



La densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento sigue la dirección del gradiente negativo de velocidad por lo que el gradiente de velocidad se considera como una fuerza impulsora del transporte de la cantidad de movimiento.

La viscosidad es la propiedad de un fluido que se opone al movimiento relativo de capas adyacentes en el fluido.

La viscosidad en gases la densidad aumenta con la temperatura.
La viscosidad en líquidos disminuye al aumentar la temperatura.

En gases, la cantidad de movimiento se transporta por las moléculas que se desplazan libremente, mientras que en los líquidos el mecanismo principal del transporte de cantidad de movimiento coincide en el choque efectivo de las moléculas.

2. Distribución de velocidad

Vx, y , z , θ, r = variables que se utilizan en las ecuaciones de cantidad de movimiento.

Ecuación general de Balance de Cantidad de movimiento

$$\text{Entrada} - \text{Salida} + \text{Generación} - \text{Consumo} = \text{Acumulación} \begin{cases} > 0 \\ 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Balance de cantidad de movimiento

Primero se selecciona una envoltura delgada de fluido que tenga la misma geometría que el objeto sobre el cual se hace el balance.

La ecuación para el flujo rectilíneo en estado estacionario, el balance de cantidad de movimiento es:

$$\left\{\begin{matrix}\text{velocidad de entrada} \\ \text{de} \\ \text{cantidad de movimiento}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{velocidad de salida} \\ \text{de} \\ \text{cantidad de movimiento}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{suma de las fuerzas} \\ \text{que} \\ \text{actúan sobre el sistema}\end{matrix}\right\} = 0$$

Fuerzas de interés son: Presión (que actúa sobre la superficie) y gravedad (que actúan sobre el volumen)

Transferencia de cantidad de movimiento.

El movimiento se transfiere de dos maneras

1. Viscoso: es una transferencia perpendicular al movimiento del fluido.
2. Cinético: es un transferencia paralela al movimiento del fluido.

Procedimiento para la resolución de un problema:

1. Escribir el balance de cantidad de movimiento para una envoltura de espesor finito.
2. Se hace tender el espesor a cero utilizando la definición matemática de la primera derivada con el fin de obtener la ecuación diferencial que describe la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento.
3. Se introduce la expresión newtoniana de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para obtener una ecuación diferencial para la distribución de velocidad.
4. Se resuelve la ecuación para obtener las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad en el sistema.
5. Se evalúan las constantes de integración utilizando las condiciones limites del sistema.

Ecuación general de transporte molecular

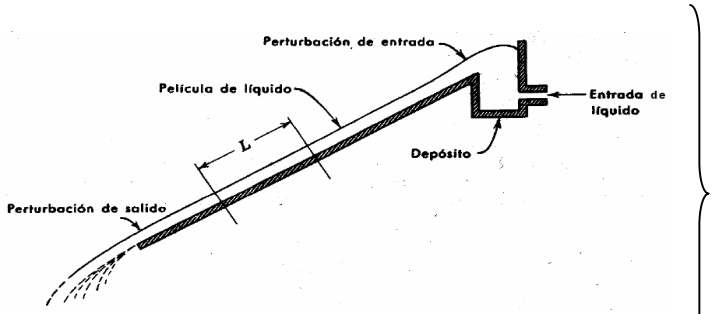
Los tres procesos de transporte molecular de momento lineal, calor y masa se caracterizan por el mismo tipo de ecuación de transporte.

$$Velocidad\ de\ transporte = \frac{Fuerza\ impulsora}{Resistencia}$$

$$\tau = -\mu\frac{dv}{dx} \qquad q = k\frac{dT}{dx} \qquad N_{AB} = -N_{AB}\frac{dx}{dt}$$

Viscosidad *Cantidad de calor* *Difusividad térmica*

El transporte molecular de una partícula se lleva a cabo en un fluido por los movimientos de las moléculas individuales. (Figura 2.1)



Flujo de una película descendente

Fig. 2.1 *Diagrama esquemático del experimento de una película descendente, con indicación de los efectos finales. En la región de Longitud L la distribución de velocidad está totalmente desarrollada.*

Fluido newtoniano	$\tau = -\mu\ (dv/dy)$
Fluido incompresible	ρ , μ = constantes
Estado estacionario	A = 0 v = constante
Flujo laminar	Re < 2100

Ejemplo 2.1 ejemplo de la aplicación de flujo viscoso de una película descendente.

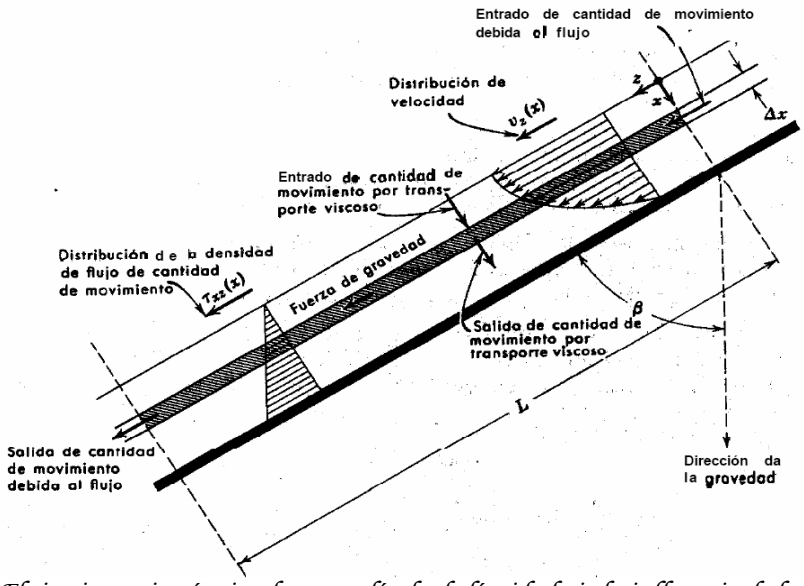


Fig. 2.2 *Flujo viscoso isotérmico de una película de líquido bajo la influencia de la gravedad, sin formación de ondulaciones. Capa de espesor Δx sobre la que se aplica el balance de cantidad de movimiento. El eje y es perpendicular al plano del papel.*

Aplicando la ecuación de balance:

$$\tau_{xz}WL_{(\square|x-)}\tau_{xz}WL_{(\square|x+\Delta x)} + V_z^2[W\Delta x\rho|\square]_{z=0} - V_z^2[W\Delta x\rho|\square]_{z=L} + WL\Delta xg\rho\cos\beta = 0$$

Ecu 2.1

Por estado estacionario A = 0 v = constante por lo tanto la velocidad es cero, por lo que la ecuación 2.1 queda:

$$\tau_{xz}WL_{(\square|x-)}\tau_{xz}WL_{(\square|x+\Delta x)} = -WL\Delta xg\rho\cos\beta$$

Ecu 2.2

Multiplicando la ecuación 2.2 por -1 y dividiendo entre WLΔx y aplicando lomite cuando Δx tiende a cero, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\tau_{xz}WL_{(\square|x+\Delta x-)}\tau_{xz}WL_{(\square|x)}}{\Delta x}\right] = g\rho\cos\beta$$

Ecu 2.3

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho\, g\cos\beta$$

Ecu 2.4

Integrando la ecuación 2.4 obtenemos:

$$\tau_{xz} = \rho\, g \cos\beta\, x + C_1 \qquad \textit{Ecu 2.5}$$

Tomando en cuenta las condiciones de frontera: $\tau_{xz} = 0$ cuando x = 0 y resolviendo la ecuación 2.5 obtenemos que la constante C_1 es cero.

Por lo tanto el perfil de área del fluido es:

$$\tau_{xz} = \rho\, g \cos\beta\, x \qquad \textit{Ecu 2.6}$$

Sustituimos la ecuación 2.6 en la ley de Newton

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho\, g \cos\beta\, x \qquad \textit{Ecu 2.7}$$

Resolviendo la ecuación diferencial y despezando al perfil de velocidad obtenemos:

$$v_z = \frac{\rho\, g \cos\beta\, x^2}{2\mu} + C_2 \qquad \textit{Ecu 2.8}$$

Se evalúa la ecuación 2.8 con las condiciones de frontera 2 (V_z= 0 cuando x = a, a= grosor de capa).

$$v_z = \frac{\rho\, g \cos\beta}{2\mu} \left(-x^2 + a^2\right) \qquad \textit{Ecu 2.9}$$

La ecuación 2.9 es el perfil de velocidad del fluido.

Condiciones de frontera.

Para fluidos en movimiento se considera dos puntos importantes:

1. En la interface sólido-líquido (paredes) la capa del fluido pegada al as paredes no se mueve, sin embargo, adquiere la velocidad con la que se desplaza la pared

$\tau = \tau_{max}$

2. En el centro del perfil: la velocidad en este punto es máxima, por lo que el esfuerxo de corte es cero ($\tau=0$)

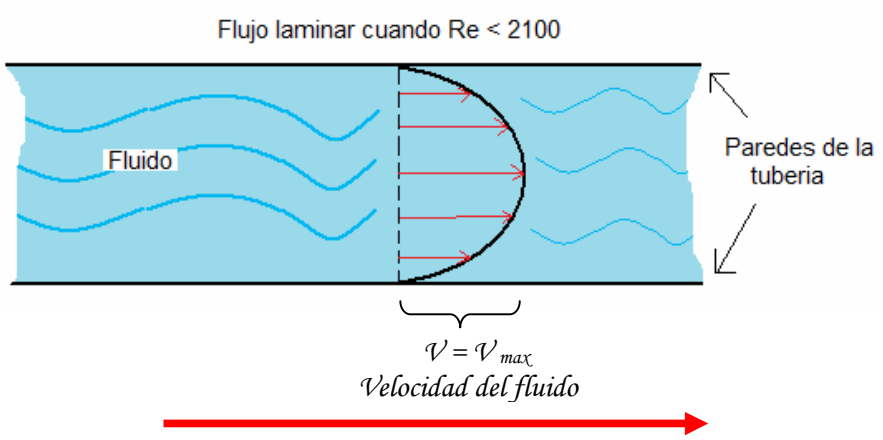


Fig 2.3 *Condiciones de frontera*

Flujo a través de un tubo circular

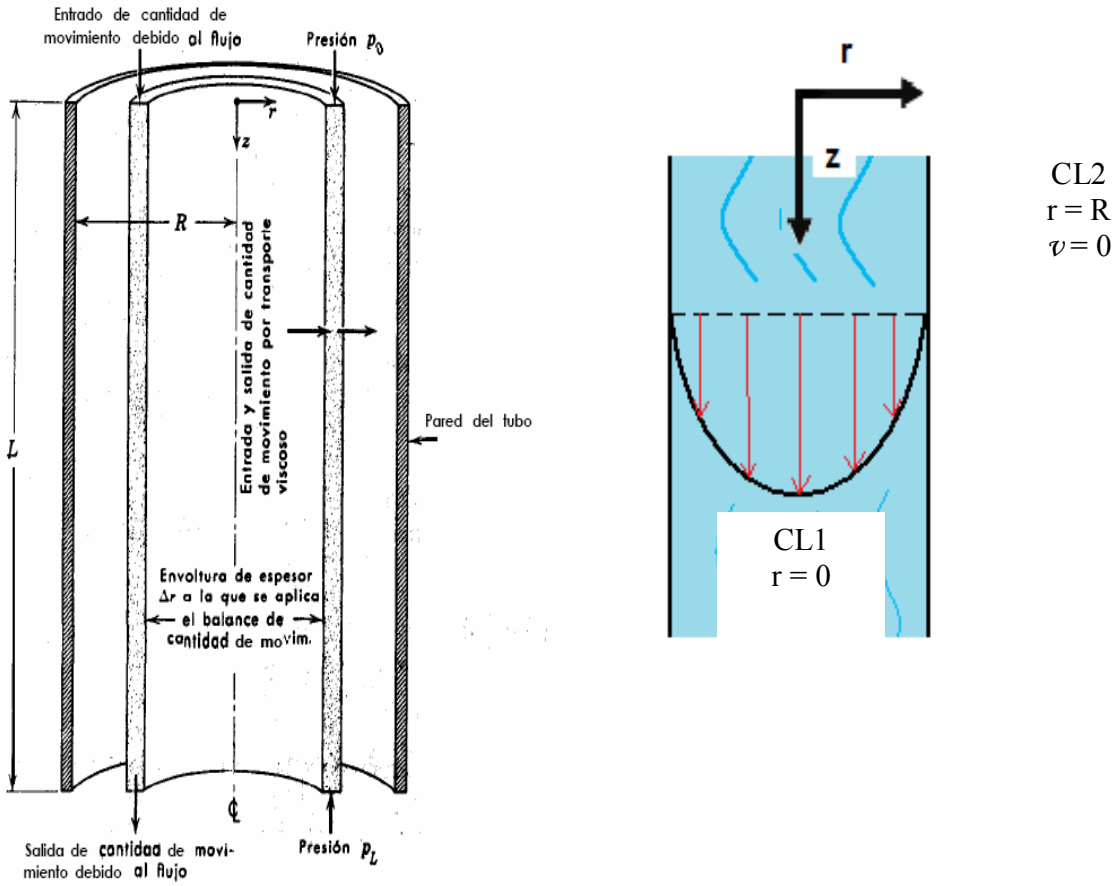


Fig 2.4 Flujo a través de un tubo circular y condiciones de frontera

	Entrada	Salida
Transporte viscoso	$\tau_{rz} 2\pi r L_{(\square\|r}$)	$-\tau_{xz} 2\pi r L_{(\square\|r+\Delta r)}$
Transporte cinético $V_z^2[2\pi r \Delta r \rho\|\square]_{z=0}$	$-V_z^2[W\Delta x\rho\|\square]_{z=L}$	
Fuerzas de presión	$P_0 2\pi r \Delta r$	$-P_L\, 2\pi r \Delta r$
Fuerzas de gravedad	$L\Delta r 2\pi r \rho g$	

Realizando el balance de materia.

$$\tau_{xz} 2\pi r L_{(\square|r-)} \tau_{xz} 2\pi r L_{(\square|x+\Delta x)} + 2P_0 \pi r \Delta r - 2P_L \pi r \Delta r + L\Delta r 2\pi r \rho g = 0$$

Ecu 2.10

Multiplicando la ecuación 2.10 por $\frac{-1}{2\pi L \Delta r}$

Y sustituyendo:

$$\frac{P_0 - P_L + \rho g L}{L} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}$$ *Ecu 2.11*

Aplicar limite cuando Δr tiende a cero

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{(r\tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}|_r)}{\Delta r} = r\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)$$ *Ecu 2.12*

$$\frac{dr\tau_{rz}}{dr} = r\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)$$ *Ecu 2.13*

Integrando y resolviendo la ecuación con las CL1 se tiene que la C_1=0 por lo que el perfil de área es:

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)}$$ *Ecu 2.14*

Sustituir el perfil de área en la ley de newton:

$$-\mu\frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)}$$ *Ecu 2.15*

Resolviendo la ecuación diferencial y aplicando las CL2 para obtener la C_2 y el perfil de velocidad del fluido en el tubo.

$$c_2 = \frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\pi L}$$

$$v_z = \frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)[(R]^2 - r^2)}{4\pi L}$$ *Ecu 2.16*

Ecuación de Hagen-Poiseuille

$$Q = \frac{[\pi(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)R^4}{8\pi L}$$

Esta ecuación establece la relación que existe entre la velocidad volumétrica de flujo y las fuerzas que lo originan, para poder usar esta ecuación se tienen que usar las siguientes condiciones:

1. Flujo laminar
2. ρ constante
3. Estado estacionario
4. Fluido Newtoniano
5. Efectos finales despreciables
6. Medio continuo
7. No hay deslizamiento en la pared

Problema: Flujo a través de una rendija

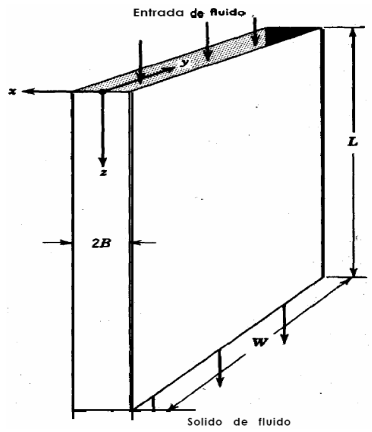


Fig 2.5 *Flujo a través de una rendija*

Un fluido viscoso circula con flujo laminar por una rendija formada por dos paredes planas separadas una distancia 2B. Efectuar un balance diferencial de cantidad de movimiento y obtener las expresiones para las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad (ver figura 2.5):

Solución:

$$\tau_{xz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right)x$$

$$v_z = \frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)B^2}{2\pi L}\left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2\right]$$

Flujo a través de una sección de corona circular

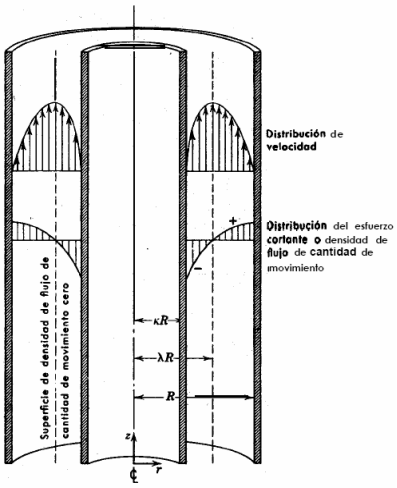


Fig 2.6 Flujo ascendente a través de dos cilindros concéntricos

	Entrada	Salida
T. viscoso	$\tau_{rz} 2\pi r L_{(\square\|r)}$	$-\tau_{xz} 2\pi r L_{(\square\|r+\Delta r)}$
T. cinético	$V_z^2 [2\pi r \Delta r \rho \|\square]_{z=0}$	$-V_z^2 [W \Delta x \rho \|\square]_{z=L}$
Fza P.	$P_0 2\pi r \Delta r$	$-P_L\, 2\pi r \Delta r$
Fza g	$L \Delta r 2\pi r \rho g$	

$\mathcal{V} = cte = 0$

Vamos a considerar ahora otro problema de flujo viscoso en coordenadas cilíndricas, pero cuyas condiciones límites son diferentes. Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros circulares, coaxiales de radios KR y *R* (véase Fig. 2.6). Comenzamos efectuando un balance de cantidad de movimiento sobre una fina envoltura cilíndrica, y se llega a la misma ecuación diferencial que se ha obtenido anteriormente para el flujo en un tubo en el ejemplo anterior ecuación 2.13

$$\frac{dr\tau_{rz}}{dr} = r\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\right) \qquad \textit{Ecu 2.17}$$

Al Integrar obtenemos:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) r + \frac{c_1}{r} \qquad \textit{Ecu 2.18}$$

En este caso C_1 no puede ser cero como en el caso anterior por lo que las condiciones limite son: r = λR τ = 0 y V1 = max

Lo más que podemos decir es que ha de existir un máximo de la curva de velocidad en un cierto plano (hasta ahora desconocido) por lo que el perfil de τ es:

$$c_1 = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) \lambda^2 R^2 \qquad \textit{Ecu 2.19}$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right)\left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r}\right]$$ *Ecu 2.20*

Sustituir el perfil de área en la ley de newton:

$$-\mu\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right)\left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r}\right]$$ *Ecu 2.21*

Resolviendo la ecuación diferencial e integrando con respecto a r.

$$v_z = -\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)}{2\mu L}\left[\frac{r^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln r\right] + c_2$$ *Ecu 2.23*

En este caso se tienen 2 condiciones limite mas:

CL2: $v_z = 0$ $r = KR$

CL3: $v_z = 0$ $r = R$

Al sustituir estas condiciones se obtienen dos ecuaciones para c_2

$$c_2 = -\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)}{2\mu L}\left[\frac{(KR)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(KR)\right]$$ *Ecu 2.23.a*

$$c_2 = -\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)}{2\mu L}\left[\frac{(R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(R)\right]$$ *Ecu 2.23.b*

Al igualar ambas ecuaciones (2.23.a y 2.23.b)

$$-\cancel{\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)}{2\mu L}}\left[\frac{(R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(R)\right] = -\cancel{\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)}{2\mu L}}\left[\frac{(KR)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(KR)\right]$$

$$\left[\frac{(R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(R)\right] = \left[\frac{(KR)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(KR)\right]$$

Resolviendo la ecuación y conocemos el valor de λ y c_2 y sustituyendo estas constantes en la ecuación de v_z (2.23) se obtiene el perfil de velocidad para el fluido:

$$v_z = \frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \frac{r}{R} + \frac{1 - K^2}{\ln\frac{1}{k}}\ln\frac{r}{K}\right]$$ *Ecu 2.23*

3. Ecuaciones de variación

Ecuación de continuidad

Esta ecuación es otra manera de expresar la ley de conservación de la materia y se deduce aplicando un balance de materia a un elemento estacionario de volumen Δx, Δy, Δz; a traves del que está circulando el fluido (véase Fig. 3.1).

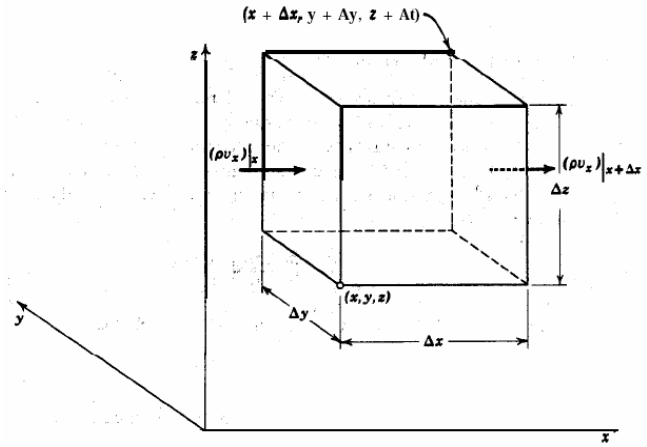


Fig 3.1 Región de volumen Δx, Δy, Δz fijo en el espacio, a través de la cual esta circulando un fluido.

$$\left\{\begin{matrix}\text{velocidad de acumu-}\\ \text{lación de materia}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{velocidad de en-}\\ \text{trada de, materia}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{velocidad de}\\ \text{salida de materia}\end{matrix}\right\}$$

Ecu 3.1

Ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos

Tabla 3.1
Ecuaciones de movimiento en coordenadas rectangulares

En función de τ

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \qquad (A)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \rho g_y \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \qquad (D)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \rho g_z \qquad (F)$$

Tabla 3.2
Ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

En función de τ

componente r^a

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right) + \rho g_r \qquad (A)$$

componente θ^b

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right) + \rho g_\theta \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes

componente r^a

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] + \rho g_r \qquad (D)$$

componente θ^b

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] + \rho g_\theta \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \qquad (F)$$

Tabla 3.3
Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas rectangulares(x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right] \qquad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right] \qquad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] \qquad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (G)$$

Tabla 3.4
Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (A)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (C)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad (D)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right] \qquad (E)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right] \qquad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (G)$$

Flujo a través de una rendija. (utilizando las ecuaciones de variación ecuación F de la Tabla 3.1)

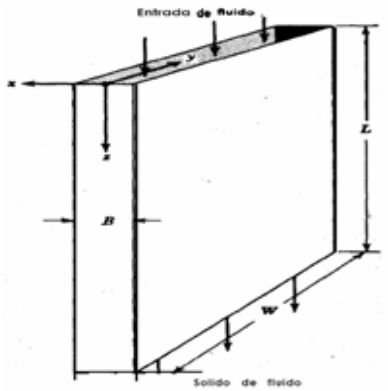


Fig 3.2 flujo a través de una rendija

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}+\cancel{v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}}+\cancel{v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}}+\cancel{v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}}\right)+\rho g_z$$

Ecu 3.2

Reacomodando la ecuación 3.2

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z=-\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right)$$

Ecu 3.1

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z=0$$

Ecu 3.2

Resolviendo la ecuación deferencial e integrando:

$$\int_{P_L}^{P_0}\partial P=\int_L^0\rho g_z\,dz$$

Ecu 3.3

Obtenemos:

$$\frac{P_0-P_L}{L}+\rho g_z L=\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{L}$$

Ecu 3.4

Sustituyendo la ecuación 3.4 en 3.1 observamos que el la ley de newton y resolviendo la ecuación diferencial.

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right)=\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{L}$$

Ecu 3.5

$$v_z{}^2=-\frac{[(\mathcal{P}]_0-\mathcal{P}_L)x^2}{\mu L}+c_1$$

Ecu 3.6

Las CL1 son: x = B y v_z = 0

$$c_1 = \frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)B^2}{\mu L}$$ *Ecu 3.7*

Sustituyendo 3.7 en 3.6

$$v_z^2 = -\frac{[(\mathcal{P}]_0 - \mathcal{P}_L)(B^2 - x^2)}{\mu L}$$ *Ecu 3.8*

Flujo tangencial de un fluido newtoniano en tubos concéntricos.

Determinar las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante, para el flujo laminar tangencial de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros verticales coaxiales, cuando el cilindro exterior gira con una velocidad angular Ω_0. (Véase Fig. 3.3.) Los efectos finales pueden despreciarse.

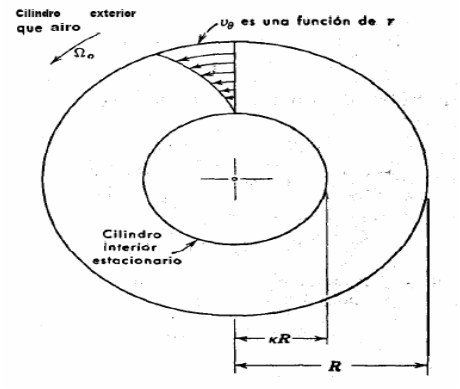


Fig 3.3 Flujo laminar de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales gira con una velocidad angular Ω_0.

Solución:

Datos a considerar:

- Cilindro exterior gira, cilindro interior estático
- Flujo laminar
- Fluido newtoniano e incompresible
- Velocidad constante (edo. estacionario)

- Hallar v_θ y $\tau_{r\theta}$

Utilizar la ecuación de variación E de la tabla 3.2, tomando las consideraciones y reacomodando la ecuación obtenemos:

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right)\right] \qquad \textit{Ecu 3.9}$$

Igualando a cero la ecuación y resolviendo el sistema (integrar 2 veces) considerando

CL1 $v_\theta = 0$ $r = kR$

CL1 $v_\theta = \Omega_0 R$ $r = R$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) \qquad \textit{Ecu 3.10}$$

$$v_\theta = \frac{r c_1}{2} + \frac{c_2}{r} \qquad \textit{Ecu 3.11}$$

De esta manera se obtienen 2 ecuaciones:

$$0 = \frac{kR\, c_1}{2} + \frac{c_2}{kR} \qquad \textit{Ecu 3.12.a}$$

$$\Omega_0 R = \frac{R\, c_1}{2} + \frac{c_2}{R} \qquad \textit{Ecu 3.12.b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las constantes 1 y 2:

$$c_1 = \frac{-2\ \Omega_0}{k^2 - 1} \qquad \textit{Ecu 3.13}$$

$$c_2 = \Omega_0 R^2 \left[\frac{k^2}{k^2 - 1}\right] \qquad \textit{Ecu 3.14}$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación 3.11 obtenemos e perfil de v_θ

$$v_\theta = \Omega_0 R \left[\frac{\frac{kR}{r} - \frac{r}{kR}}{k - \frac{1}{k}}\right] \qquad \textit{Ecu 3.15}$$

Utilizando la ecuación D de la tabla 3.4 podemos obtener el esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}(r)$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$