RAÍCES DE UN POLINOMIO: Se dice que un valor $x = a$ es raíz de un polinomio $P(x)$, cuando al sustituir dicho valor en el polinomio, el resultado es 0; es decir, cuando $P(a) = 0$.Las raíces de un polinomio, también se llaman ceros del polinomio.

Por ejemplo, para $P(x)= x^2+3x-4$, 1 es un cero o raíz del polinomio $P(1)= 1^2+3\cdot 1-4$=1 + 3 – 4= 0

Observaciones:

- El número de raíces reales es menor o igual que el grado del polinomio.
- Un polinomio cuyo término independiente sea 0, es decir, no aparece término independiente, siempre admite como raíz x = 0. Como se trata de una expresión en la que todos los términos contienen el factor x, al sustituir ésta por 0, se anulan todos y el resultado es 0

MÉTODOS PARA CALCULAR LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO

1. Si es de Grado 1: Bastará con despejar la incógnita, x.
   Ejemplo: Halla la raíz de $\boldsymbol{P(x)=2x+3}$

$$2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \quad \text{(Raíz única)}$$

2. Si es de Grado 2: Resolveremos la ecuación de segundo grado resultante.
   Ejemplo: Halla la raíz de $\boldsymbol{P(x)=2x^2+5x+3}$

$$2x^2+5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{-5\pm 1}{4}=\begin{cases}\frac{-5+1}{4}=\frac{-4}{4}=-1\\[4pt] \frac{-5-1}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}\end{cases} \rightarrow \text{Dos raíces}$$

3. Si es Bicuadrada: Se trata de un polinomio de grado 4 incompleto, con sólo los términos de los grados 4, 2 y 0. Es decir, tiene la forma: $ax^4+bx^2+cx=0$. Esta ecuación se puede transformar en una de segundo grado mediante el cambio de $y=x^2$. Resolveremos la de 2º grado resultante y desharemos el cambio para encontrar las soluciones de la variable inicial.

   Ejemplo: Halla las raíces de
   a) $\boldsymbol{P(x)=x^4-13x^2+36}$

$$x^4-13x^2+36=0 \text{, hacemos el cambio: } x^2=y \Rightarrow y^2-13y+36=0$$

$$y^2-13y+36=0 \Rightarrow y=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 36}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{13+5}{2}=\frac{18}{2}=9\\[4pt] \frac{13-5}{2}=\frac{8}{2}=4\end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas.

- $y=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm 3$
- $y=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2$

   b) $\boldsymbol{P(x)=x^4+14x^2-32}$

$$x^4+14x^2-32=0 \text{, hacemos el cambio: } x^2=y \Rightarrow y^2+14y-32=0$$

$$y^2+14y-32=0 \Rightarrow y=\frac{-14\pm\sqrt{196+128}}{2}=\frac{-14\pm 18}{2}=\begin{cases}\frac{-14+18}{2}=\frac{4}{2}=2\\[4pt] \frac{-14-18}{2}=\frac{-32}{2}=-16\end{cases}$$

- $y=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$
- $y=-16 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow$ no hay raíces reales con este valor (porque $x^2=-16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-16}$)

Las raíces del polinomio $P(x)=x^4+14x^2-32$ son: $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

4. Si es de Grado mayor que 2, no bicuadrada:

En este caso, la regla de Ruffini será útil para encontrar las raíces *enteras* del polinomio. Las posibles raíces las buscaremos entre los divisores del término independiente. Iremos probando cada uno de ellos para ver si el resto da 0, en cuyo caso, se tratará de una raíz. El número candidato a raíz es el que colocaremos a la izquierda al aplicar Ruffini.

Ejemplos: Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente 6, que son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Empezamos a comprobar:

- Con el 1:

	1	-4	1	6
1	0	1	-3	-2
	1	-3	-2	**4**

Resto $\neq 0 \Rightarrow$ No es raíz

Como el resto es distinto de cero, es 4, x = 1 no es raíz del polinomio dado.

- Con el -1:

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

- Con el 2:

	1	-4	1	6
2	0	2	-4	-6
	1	-2	-3	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

- Con el 3:

	1	-4	1	6
3	0	3	-3	-6
	1	-1	-2	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene, como mucho, tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, los ceros de este polinomio son: x = -1, x = 2 y x = 3.

b) $\boldsymbol{Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$

Los divisores de 36 son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18, ± 36

	1	0	-13	0	36
-2	0	-2	4	18	-36
	1	-2	-9	18	**0**
2	0	2	0	-18	
	1	0	-9	**0**	
3	0	3	9		
	1	3	**0**		
-3	0	-3			
	1	**0**			

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 18: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 9: ± 1, ± 3, ± 9

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 3: ± 1, ± 3

Como es de grado 4 y hemos conseguido 4 raíces, no es necesario buscar más. Los ceros de este polinomio son: x = -2, x = 2, x = -3 y x = 3.

c) $\boldsymbol{R(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$

	1	-5	4	3	9
3	0	3	-6	-6	-9
	1	-2	-2	-3	**0**
3	0	3	3	3	
	1	1	1	**0**	

Si continuamos probando con 1 y -1, que serían los divisores de 1 (el último término independiente), no obtendríamos ningún resto 0. Entonces, no hay más raíces *enteras*. Tendríamos que ver si existen otras raíces.
Para ello trabajaremos con el último polinomio cociente obtenido, que es de grado 2 y podemos aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado.

Último polinomio cociente: $C(x) = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ → No tiene raíces reales, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Por tanto, el polinomio inicial P(x) tiene sólo una raíz real, x = 3, que es doble.

5. Si tenemos un producto de varios polinomios: No es necesario realizar el producto de ellos para ver el polinomio final del que se trata y calcular después sus raíces. Sólo hay que tener en cuenta lo siguiente: Para que un producto sea 0, alguno de los factores debe ser cero.
   Esto significa que igualando cada uno de los factores a cero, encontraremos todas las raíces.

   Ejemplos: Halla las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x) = (x-3)\cdot(x+4)\cdot x$

$$(x-3)\cdot(x+4)\cdot x = 0 \Rightarrow \left.\begin{cases} \boxed{x-3=0 \Rightarrow x=3} \\ \boxed{x+4=0 \Rightarrow x=-4} \\ \boxed{x=0} \end{cases}\right\}$$

→ Las raíces son: x = 0, x = 3 y x = - 4

b) $P(x) = (x+1)\cdot(x-5)\cdot(x^2-5x+6)$

$$(x+1)\cdot(x-5)\cdot(x^2-5x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Las raíces son -1, 5, 2 y 3