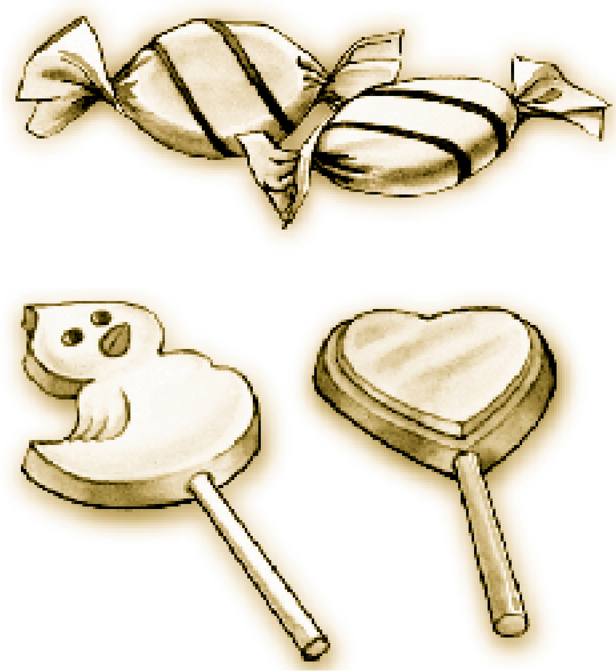
Lección 4: Proporcionalidad

La proporcionalidad es un tema que hemos venido estudiando desde el primer grado de secundaria, sobre todo en la lección 7 del segundo curso. La idea de proporcionalidad se sitúa dentro de una relación entre dos clases de cantidades o medidas. Una vez que se establece la relación es posible decir si en ella existe proporcionalidad o no. Veamos algunos ejemplos.

> Mayra y Lety fueron a comprar dulces, Mayra compró 6 caramelos y pagó \$0.15. Lety se llevó 12 caramelos y pagó \$0.30.

Como vemos, en este ejemplo hay una relación entre la cantidad de dulces y la cantidad de dinero que se paga por ellos. Además esta relación cumple una propiedad que la caracteriza de manera especial. Observemos que Lety compró el doble de caramelos que Mayra, ya que 12 es el doble de 6, pero también Lety pagó 30 centavos, que es el doble de lo que pagó



Mayra. En esta relación vemos que a *más* caramelos, *más* es lo que hay que pagar y no sólo esto, sino que el aumento es *proporcional*.

Otros ejemplos de este tipo de relaciones son las tablas de precios que tienen algunas taquerías o tortillerías, o los negocios de fotocopiadoras. A las relaciones de este tipo se les llama relaciones **directamente proporcionales**.

> Nacho y Manuel tienen cada uno un tanque para almacenar agua, y ambos tanques son idénticos. Para llenarlos tienen que caminar al pozo, llenar sus cubetas y regresar a su casa para vaciarlas en su tanque. Nacho tiene una cubeta de 10 litros, Manuel tiene una cubeta de 20 litros. Por esta razón, cuando el tanque está vacío, para llenarlo Nacho da 10 vueltas mientras que Manuel sólo da 5 vueltas.

Al analizar este ejemplo observamos que hay una relación entre la capacidad de las cubetas y el número de vueltas que hay que dar para llenar tanques iguales. Cuando las cubetas son más grandes se requiere dar menos vueltas. En esta relación, a diferencia de la del primer ejemplo, a *más* capacidad de las cubetas *menos* vueltas hay que dar. Por esto decimos que es una relación **inversa**, pero además el aumento en la capacidad se relaciona con la disminución en el número de vueltas proporcionalmente, ya que cuando la capacidad de las cubetas es el doble, el número de vueltas se reduce a la mitad. En cada viaje Nacho acarrea 10 litros, mientras que Manuel lleva 20 litros, el doble. Así mismo Nacho da 10 vueltas mientras que Manuel da 5 vueltas, la mitad.

Otro ejemplo de este tipo de relaciones sucede cuando dos vehículos recorren una misma distancia a diferentes velocidades. El que viaja a mayor velocidad se llevará menos tiempo en hacer el recorrido, el que viaja a menor velocidad tardará más en llegar. A este tipo de relaciones se les llama **inversamente proporcionales.**

En las siguientes secciones estudiaremos algunas propiedades de relaciones tanto directa como inversamente proporcionales. Presentaremos ejemplos y situaciones cuyo conocimiento nos puede facilitar la resolución de problemas. Conviene aclarar que no cualquier relación es directa o inversamente proporcional: hay relaciones que no son proporcionales. El siguiente es un ejemplo de relación que no es proporcional:

> El área de un círculo está dada por la fórmula $\boldsymbol{A} = \pi \boldsymbol{r}^2$. Entonces si tenemos un círculo de radio 3 cm y usando para π la aproximación 3.1416, el área es igual a 28.2744 cm^2. Si tomamos una circunferencia del doble de radio, esto es de radio 6 cm, al sustituir en la fórmula y hacer los cálculos resulta que el área es 113.0976 cm^2, que no es el doble de 28.2722. Si bien es cierto que a mayor radio, mayor área, el aumento no es proporcional al aumento del radio.

Proporcionalidad directa

El primer ejemplo de la sección anterior es un ejemplo de proporcionalidad directa. Para estudiar las propiedades de este tipo de relación vamos a ver el caso de la venta de caramelos y completaremos los datos que faltan en esta tabla.

Caramelos	6	12	18			60	90		120
A pagar en centavos	15	30	0	60	90	150 ($1.50)		270 ($2.70)	

Observemos que hay tres columnas completas: las que relacionan 6 caramelos con 15 centavos, 12 caramelos con 30 centavos y 60 caramelos con 150 centavos (o, lo que es lo mismo, con $1.50).

Si consideramos el cociente de cantidad a pagar entre el número de caramelos comprados, tenemos $\frac{15}{6} = \frac{30}{12} = \frac{150}{60}$. Como podemos observar, todos estos números son el mismo: están expresados como fracciones distintas pero equivalentes. De hecho todas corresponden al decimal 2.5.

En cualquier relación directamente proporcional se cumple este hecho: que el cociente de dos cantidades relacionadas es siempre el mismo, en este caso 2.5. A este cociente se le llama **valor unitario** o **constante de proporcionalidad**. En este ejemplo la constante de proporcionalidad representa el precio en centavos de cada caramelo. Como ya se sabe que cada caramelo cuesta 2.5 centavos, para encontrar cuánto se debe pagar por 18 caramelos sólo se requiere multiplicar el valor 2.5 por 18. Al hacer la multiplicación encontramos que 18 x 2.5 = 45. Hay que pagar 45 centavos.

Otra manera de razonar es la siguiente: 18 es el triple de 6, entonces hay que pagar el triple de lo que se pagó por 6 caramelos, esto es, 3 x 15 = 45.

Con cualquiera de estos procedimientos podemos completar la tabla para 90 y 120 caramelos. Como 90 x 2.5 = 225.0, por 90 caramelos se pagan 225 centavos (es decir, $2.25), mientras que por 120 caramelos se pagan 120 x 2.5 = 300 centavos (es decir, $3.00).

Existe otra relación importante que cumplen las relaciones directamente proporcionales. Al dividir dos cantidades en una misma clase, el cociente obtenido es el mismo que al dividir sus correspondientes en la otra clase. Por ejemplo, si nos fijamos en la clase de los caramelos y dividimos 12 ÷ 6 = 2, también sus correspondientes precios, que son 30 y 15, dan 2 al dividirse. Lo que estamos comprobando aritméticamente es algo que ya sabíamos: como 12 es el doble de 6, 30 es el doble de 15.

Veamos otro caso, tomemos dos cantidades en el renglón de los caramelos y dividamos una entre otra: 120 ÷ 90 = 1.333…, ahora consideremos los correspondientes precios: 300 y 225, al tomar su cociente resulta 300 ÷ 225 = 1.333… Lo que se tiene aquí es que como 120 es 1.333… veces 90, lo que se paga por 120 es 1.333 veces lo que se paga por 225.

Para completar los datos que faltan en la tabla, que son la cantidad de caramelos que se pueden comprar con 60, 90 y 270 centavos, podemos utilizar el valor unitario. Si cada caramelo cuesta 2.5 centavos, con 60 centavos se pueden comprar 60 ÷ 2.5 = 24 caramelos.

Para resumir lo que se ha discutido aquí observemos que:

- El número de caramelos multiplicado por 2.5 nos da la cantidad que se pagará.
- La cantidad pagada entre 2.5 nos da la cantidad de caramelos comprados.

- Cualquier cantidad pagada entre el número de caramelos comprados con ella da 2.5.

Ejercicio 1

Termine de completar la tabla de los caramelos del primer ejemplo.

Ejercicio 2

La siguiente tabla se refiere a la cantidad de sacos de abono que se requieren para abonar diferentes áreas de cultivo de acuerdo con su medida en metros cuadrados. Complete la tabla y obtenga la constante de proporcionalidad.

Cantidad de tierra en m^2	1	2		10	15		50	75	
Cantidad de abono en sacos			3	5		13.5	25		42

Regla de tres

En esta sección veremos una manera corta de resolver algunos problemas de proporcionalidad directa, llamada la **regla de tres**. Cuando se sabe que una relación entre dos clases de objetos es de proporcionalidad directa y se conocen tres datos, es fácil encontrar el cuarto. Veamos algunos ejemplos.

Cuatro camisas cuestan $300. ¿Cuánto cuestan cinco camisas?

Podemos acomodar la información de la siguiente manera:

Camisas:	4	5
Costo:	300	?

Llamemos ***x*** al costo de las 5 camisas. Entonces tenemos:

Camisas:	4	5
Costo:	300	***x***

A este acomodo lo podemos leer de la siguiente manera: "cuatro es a trescientos como cinco es a ***x***". Podemos encontrar **x** buscando primero la constante de proporcionalidad, que es el precio de una camisa, así: 300 ÷ 4 = 75, y luego multiplicando ese resultado por 5, así: 75 x 5 = 375. Entonces, cinco camisas cuestan \$375. Observe que el resultado de 375 se obtuvo de hacer las operaciones $\frac{300}{4}$ x 5 y que otra manera de expresar las operaciones es así: $\frac{300 \times 5}{4}$.

Dicho de otra manera, si consideramos nuestro acomodo inicial,

Camisas:	4	5
Costo:	300	***x***

podemos encontrar el valor de ***x*** multiplicando los dos datos existentes en la diagonal en la que no está la ***x*** y dividiendo entre el tercero:

$$x = \frac{300 \times 5}{4} = \frac{1500}{4} = 1500 \div 4 = 375$$

Veamos otro ejemplo.

¿Cuánto recorre un automóvil en 90 minutos si viaja a 80 kilómetros por hora?

Si ahora llamamos ***x*** a lo que el automóvil recorre en 90 minutos, podemos acomodar la información así:

Distancia:	x	80
Tiempo:	90	60

Entonces encontramos el valor de x multiplicando los dos datos existentes en la diagonal en la que no está la x y dividiendo entre el tercero:

$$x = \frac{90 \times 80}{60} = \frac{7200}{60} = 7200 \div 60 = 120$$

El automóvil recorre 120 kilómetros en 90 minutos.

Observe que con esta regla no importa cuál es el cuarto dato faltante. Por ejemplo, podemos preguntarnos cuánto tiempo tarda el mismo automóvil del ejemplo anterior en recorrer 50 kilómetros. Entonces tenemos:

Distancia:	50	80
Tiempo:	x	60

Y ahora la regla de tres se resuelve así:

$$x = \frac{50 \times 60}{80} = \frac{3000}{80} = 37.5$$

El automóvil tarda 37 minutos y medio en recorrer los 50 kilómetros.

También podemos preguntarnos a qué velocidad viaja un automóvil que recorre 125 Km en una hora y cuarto. Podemos resolver este problema de dos maneras. O bien traducimos todo a minutos, entonces tenemos que una hora y cuarto son 60 + 15 = 75 minutos, y la regla de tres queda así:

Distancia:	125	***x***
Tiempo:	75	60

y la solución es:

$$\boldsymbol{x} = \frac{125 \times 60}{75} = \frac{7500}{75} = 100,$$

o bien expresamos todo en horas y la regla de tres queda así:

Distancia:	125	***x***
Tiempo:	$1\frac{1}{4}$	1

y la solución es:

$$\boldsymbol{x} = \frac{125 \times 1}{1\frac{1}{4}} = \frac{125}{\frac{5}{4}} = \frac{125}{1} \div \frac{5}{4} = \frac{125}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{125 \times 4}{1 \times 5} = \frac{500}{5} = 100.$$

De cualquier modo, encontramos que la velocidad del automóvil era de 100 kilómetros por hora. Observe que para realizar la regla de tres, necesitamos que las unidades de los elementos de la misma clase fueran siempre las mismas: todas las distancias en kilómetros y todos los tiempos o bien en minutos o bien en horas.

Ejercicio 3

Encuentre, por regla de tres, el valor de ***x*** en los siguientes arreglos:

a) 15.6   ***x***
    7.2   8.4

b) 91   3.9
    x   2.4

c) ***x***   1700
    25   510

d) 548   153
    8.1   ***x***

Ejercicio 4

Resuelva, por regla de tres, los siguientes problemas de proporcionalidad directa:

a) Si dos tacos cuestan $3.00, ¿cuántos tacos podrán comprarse con $36.00?
b) Si una llave de agua llena tres cuartas partes de un tanque en 24 minutos, ¿cuánto tardará el tanque en llenarse?
c) Si un mantel mide 1.20 m de ancho por 1.80 m de largo, ¿qué ancho tendrá un mantel de la misma proporción si de largo mide 1.50 m?
d) Si 46 personas caben en dos autobuses, ¿cuántos autobuses se necesitan para transportar a 115 personas?

Proporcionalidad inversa

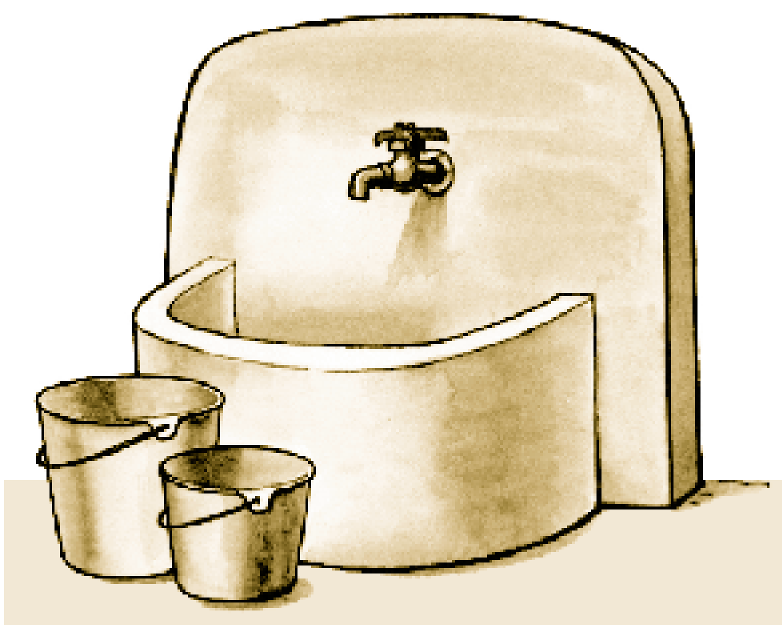
En esta sección profundizaremos en algunos aspectos de las relaciones de proporcionalidad inversa. Para ello volveremos al segundo ejemplo de la primera parte de esta lección, el de las cubetas. Mostraremos la información conocida en una tabla y dejaremos algunos datos sin revelar para irlos obteniendo de acuerdo con las propiedades que encontremos.

Capacidad de cada cubeta	1	2		10	20		40	50
No. de vueltas			12.5	10	5	4		

En esta relación ya no se cumple lo que pasaba con los caramelos de la sección anterior. Por ejemplo tomamos en el renglón de capacidad de las cubetas y dividimos $20 \div 10 = 2$, las correspondientes vueltas son 5 y 10, respectivamente, pero $5 \div 10 = \frac{1}{2}$, que no es igual a 2. Esto sucede porque la relación es proporcional pero no directa, sino inversa, y podemos decir que los cocientes o razones obtenidos son inversos: 2 y $\frac{1}{2}$.

Otra relación que se puede encontrar es que al multiplicar la capacidad de las cubetas por el número de vueltas es el mismo, por ejemplo aquí tenemos $10 \times 10 = 20 \times 5 = 100$. Este dato nos da información acerca de lo que acarrea cada cubeta en total, esto es 100 litros por cubeta. Con este dato ya es fácil completar la tabla, por ejemplo con la cubeta de 1 litro, se necesitan $100 \div 1 = 100$ vueltas. Para la de 2 litros se requieren $100 \div 2 = 50$ vueltas.

También podemos saber la capacidad de las cubetas de acuerdo al número de vueltas, si se usaron 4 vueltas para llevar



100 litros, en cada vuelta se llevaron 100 ÷ 4 = 25 litros.
La capacidad de la cubeta es 25 litros.

En resumen tenemos:

- El cociente de 100 entre el número de vueltas nos da la capacidad de cada cubeta.
- El cociente de 100 entre la capacidad de una cubeta nos da el número de vueltas.
- Al multiplicar la capacidad de una cubeta por su correspondiente número de vueltas, se obtiene siempre 100.

Cabe señalar que en las relaciones de proporcionalidad inversa no se puede aplicar la regla de tres como fue expuesta en la sección precedente.

Ejercicio 5

Complete la tabla de las cubetas y las vueltas.

Ejercicio 6

La siguiente tabla muestra las velocidades de distintos vehículos y el tiempo que tardan en viajar de Cuitzeotlán a Mirabampo. Complete la tabla y encuentre la distancia entre Cuitzeotlán y Mirabampo.

Velocidad del vehículo		20		45		75	80	100	120
Tiempo que tarda	24		8		4	3.2		2.4	

Variaciones proporcionales y no proporcionales

Consideraremos ahora otros ejemplos.

En la tienda de abarrotes de don Hilario aparece un letrero que dice "Ventas al mayoreo y menudeo, pregunte por nuestros precios". Un cliente que quiere comprar arroz pide a don Hilario que le dé 9 kilos de arroz. Don Hilario le dice que son $45, pero que por esta misma cantidad de dinero se

puede llevar 10 kilos. El cliente no entiende nada y pide a don Hilario que le explique. Para ello don Hilario le muestra una tabla como ésta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	100
5	10	15	20	25	30	35	40	45	45	88	132	160	200	400

Don Hilario explica a su cliente que a partir de 10 kilos él considera que es compra al mayoreo y baja el precio por kilo. Si observamos bien, al dividir el precio entre la cantidad en las primeras 9 columnas, siempre obtenemos el mismo resultado, 5, por ejemplo $30 \div 6 = 40 \div 8 = 5$, etc. Éste es el precio por kilo si se compran de 1 a 9 kilos. Para estas cantidades existe proporcionalidad.

En cambio, a partir de 10 tenemos otras relaciones:

$45 \div 10 = 4.5$, $132 \div 30 = 4.40$, $200 \div 50 = 4$,
$88 \div 20 = 4.40$, $160 \div 40 = 4$, $400 \div 100 = 4$.

Esto es, el precio del kilo de arroz varía según se compre más o menos.

Esta relación no es directamente proporcional por lo que acabamos de ver. También podemos notar que no es directamente proporcional si observamos que por 10 kilos se pagan \$45, mientras que por 20 kilos, que es el doble de 10, no se paga el doble, que sería 90, sino \$88.

Otro ejemplo de una proporción que no es directamente proporcional es el siguiente.

El volumen de un tanque cilíndrico se calcula sacando el área de la base por la altura. De hecho, si ***r*** es el radio del círculo que es la base del tanque y ***h*** es la altura, el volumen está dado por la fórmula

$$\boldsymbol{V} = \pi \times \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{r}^2$$

Con esta fórmula vamos a obtener algunos volúmenes de cilindros de 50 cm de altura y de diferentes radios, y vamos a mostrar esta información en una tabla. Para π usaremos la aproximación 3.14 y redondearemos los resultados a una cifra decimal.

r en cm	10	20	25	30	35	40	48	50	75
V en cm^3	15700	62800	98125	141300	192325	251200	361730	392500	883125

Para ver que no se trata de una relación directamente proporcional, observaremos un solo caso. Por ejemplo para 25 cm de radio el volumen del cilindro es 98125 cm^3; mientras que para un radio del doble de tamaño, esto es, de 50 cm, el volumen es 392500, que no es el doble de 98125. Con esto basta para saber que la relación no es directamente proporcional.

Ejercicio 7

Las siguientes tablas muestran distintas relaciones entre cantidades de dos clases, algunas son proporcionales y otras no. Entre las proporcionales, algunas son directas y otras son inversas.

Identifique de qué tipo es cada relación y justifique su respuesta. Cuando la relación sea directamente proporcional, indique cuál es la constante de proporcionalidad.

a) Se sabe que la reproducción de cierta célula es por bipartición y que el proceso se repite cada 24 horas. La siguiente tabla muestra la cantidad de células después de diferentes cantidades de días.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de células	2	4	8	16	32	64	128	256	512

b) La cantidad de harina que se requiere para hacer 20 galletas es una taza. La siguiente tabla muestra la cantidad de harina necesaria para que, con la misma receta, se hagan diferentes cantidades de galletas.

Harina en tazas	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5
Cantidad de galletas	10	20	30	40	50	60	70	80	100

c) El perímetro de un cuadrado varía de acuerdo al lado y la fórmula para calcular el perímetro es $\boldsymbol{P} = 4l$. La tabla siguiente muestra el perímetro de algunos cuadrados de acuerdo al lado en metros.

l	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	1.00	1.20	1.40	1.50
$\boldsymbol{P}$	0.40	0.80	1.20	1.60	2.00	4.00	4.80	5.60	6.00

d) La cantidad de gasolina que gasta un automóvil varía de acuerdo con la velocidad a la que viaja el automóvil. La siguiente tabla muestra cuántos kilómetros por litro de gasolina rinde cierto automóvil, según la velocidad a la que viaja (en kilómetros por hora).

Velocidad	40	60	80	100	120	140
Rendimiento	9.8	10.7	17.5	16.8	12.3	11.1

e) Para almacenar las cajas en las que se vende cierto producto, se pueden acomodar los lotes sobre rectángulos que tienen diverso ancho y largo. La siguiente tabla muestra las dimensiones (en metros) que ocupan distintos lotes.

Largo	4	5	6	8	10	12
Ancho	3	2.4	2	1.5	1.2	1

f) El uso del polvo de hornear varía según la altitud sobre el nivel del mar a la que se utiliza. La siguiente tabla muestra la cantidad de polvo de hornear (en cucharaditas) que se debe utilizar para hornear cierto pastel, de acuerdo con la altitud sobre el nivel del mar (en metros).

Altitud	0	500	1000	1500	1000	2500	3000	3500	4000
Polvo de hornear	2	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{8}$	1