Universidad Técnica Nacional

Factorización de expresiones algebraicas

Coordinación de Matemática y Estadística Cálculo I

Para una mejor visualización del documento se le recomienda descargar el mismo y utilizar alguna herramienta lectora de PDF. Al abrirlo se sugiere visualizarlo en pantalla completa para un mejor uso de la navegación. A continuación se detallan los botones de navegación para facilitar su utilización:

◀ ▶ Flechas para avanzar hacia atrás y hacia adelante.

Ir al menú principal Ir al página de información.

Presentación

Este material tiene como finalidad reforzar las habilidades y destreza necesarias para factorizar expresiones algebraicas.

Para ello, se plantean una serie de ejercicios, los cuales serán resueltos paso a paso, resaltando aquellos aspectos importantes en cada uno de los métodos para factorizar expresiones algebraicas.

Es importante recalcar que la factorización de expresiones algebraicas, es uno de los procesos indispensables para el cálculo de límites, que corresponde a la primera unidad del curso Cálculo I.

Índice

Presentación 2

¿Qué es factorizar? 4

Métodos de factorización 5

Factor común 6

Inspección o tanteo 11

Diferencia de cuadrados 19

Suma y resta de cubos 23

Teorema del factor 28

Agrupamiento 30

Créditos 34

¿Qué es factorizar?

Factorizar una expresión algebraica, es un proceso que consiste en expresar una suma o diferencia de términos como el producto de dos o más factores.

Ejemplos:

1) $16x^3 - 2 = 2(x-1)(x^2+x+1)$

2) $3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$

3) $2a^2 - 3cb + 2ab - 3ac = (2a-3c)(a+b)$

Existen diferentes métodos para factorizar una expresión algebraica.

Métodos de factorización

Para factorizar una expresión algebraicas, existen diferentes métodos, los cuales se mencionan en la siguiente figura.

Figura 1. Métodos Factorización

Factor Común

Este método consiste en obtener un factor común de cada uno de los términos que conforman la expresión algebraica.

El factor común está conformado por el máximo común divisor de los coeficientes numéricos y las variables de menor potencia que aparecen en todos los términos de la expresión.

Para completar la factorización, se divide cada término del polinomio entre el máximo factor común y el resultado se escribe dentro de un paréntesis.

Ejemplo #1

Factorizar la siguiente expresión:

$$12a^3x^2z - 42z^2x^4a^2 + 30x^3a^4z^3$$

Paso 1

Identificar si la expresión algebraica posee términos en común.

Paso 2

Obtener el máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes numéricos.

12	42	30	2
6	21	15	3
2	7	5	$2 \cdot 3 = 6$

Ejemplo #1

Paso 3

Determinar las variables en común, de menor potencia, que conforma la expresión.

$$a^2x^2z$$

Paso 4

Determinar el factor común

$$6a^2x^2z$$

Paso 5

Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

$$\frac{12a^3x^2z}{6a^2x^2z} = 2a$$

Ejemplo #1

$$\frac{-42z^2x^4a^2}{6a^2x^2z} = -7zx^2$$

$$\frac{30x^3a^4z^3}{6a^2x^2z} = 5xa^2z^2$$

Paso 6

Dar la respuesta

$$6a^2x^2z(2a - 7zx^2 + 5xa^2z^2)$$

Ejemplo #2

Factorizar la siguiente expresión:

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{m}-\mathbf{2}\boldsymbol{n})-\boldsymbol{y}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{3}\boldsymbol{m})$$

Paso 1

Identificar si la expresión algebraica posee términos en común.

Paso 2

Sacar un menos a factor común

$$5x(3m-2n)--y(3m-2n)$$

Ejemplo #2

Paso 3

Aplicar ley de signos

$$5x(3m-2n)+y(3m-2n)$$

Paso 4

Determinar el factor común

$$(3m-2n)$$

Paso 5

Dividir la expresión algebraica entre el factor común

$$\frac{5x(3m-2n)}{(3m-2n)}=5x$$

Ejemplo #2

$$\frac{y(3m-2n)}{(3m-2n)} = y$$

Paso 6

Dar la factorización de la expresión algebraica.

$$(3m-2n)(5x+y)$$

Paso 7

Dar la respuesta

$$5x(3m-2n) + y(3m-2n)$$
$$= (3m-2n)(5x+y)$$

Inspección o tanteo

Este método de factorización se utiliza en trinomios cuadrados de la forma:

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{con } a, b, c \in IR$$

El trinomio cuadrado es factorizable si y solo si el discriminante,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

es mayor o igual a cero.

Cuando el discriminante es menor a cero, la expresión no es factorizable en el conjunto de los reales.

Ejemplo #1

Factorizar la siguiente expresión:

$$3x^2 + 7x + 2$$

Paso 1

Identificar los valores de a, b, c del trinomio cuadrado.

$$a = 3 \quad b = 7 \quad c = 2$$

Paso 2

Obtener el determinante

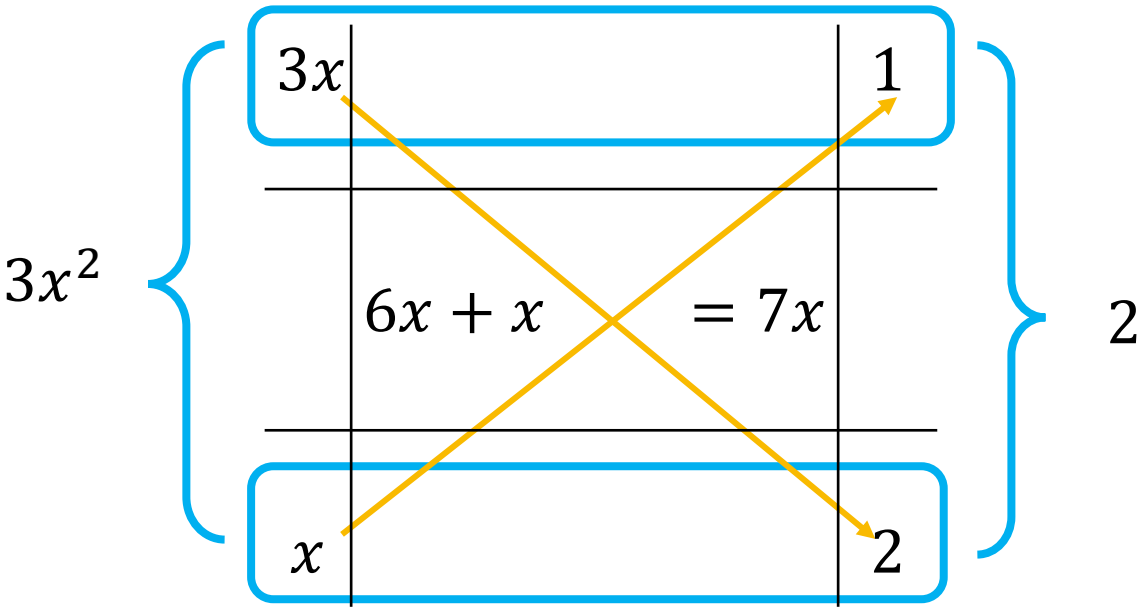
$$\Delta = 7^2 - 4(3)(2) = 25$$

Como el discriminante es mayor a cero, entonces la expresión es factorizable.

Ejemplo #1

Paso 3

Determinar dos valores multiplicados que den $3x^2$ y dos valores multiplicados que den 2. De manera que al multiplicar en cruz y sumar los términos, se obtenga como resultado $7x$.



Paso 4

Dar la factorización de la expresión es:

$$3x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x + 2)$$

Ejemplo #2

Factorizar la siguiente expresión:

$$2n^2 - 3n + 4$$

Paso 1

Identificar los valores de a, b, c del trinomio cuadrado.

$$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 4$$

Paso 2

Obtener el discriminante, para determinar si el trinomio es factorizable o no.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(4) = -13$$

Ejemplo #2

Paso 3

Como el discriminante de la expresión dio como resultado un término negativo, la expresión no es factorizable en el conjunto de los número reales.

Ejemplo #3

Factorizar la siguiente expresión:

$$-8m - 4m^2 - 3$$

Paso 1

Identificar los valores de a, b, c del trinomio cuadrado.

$$a = -4 \quad b = -8 \quad c = -3$$

Paso 2

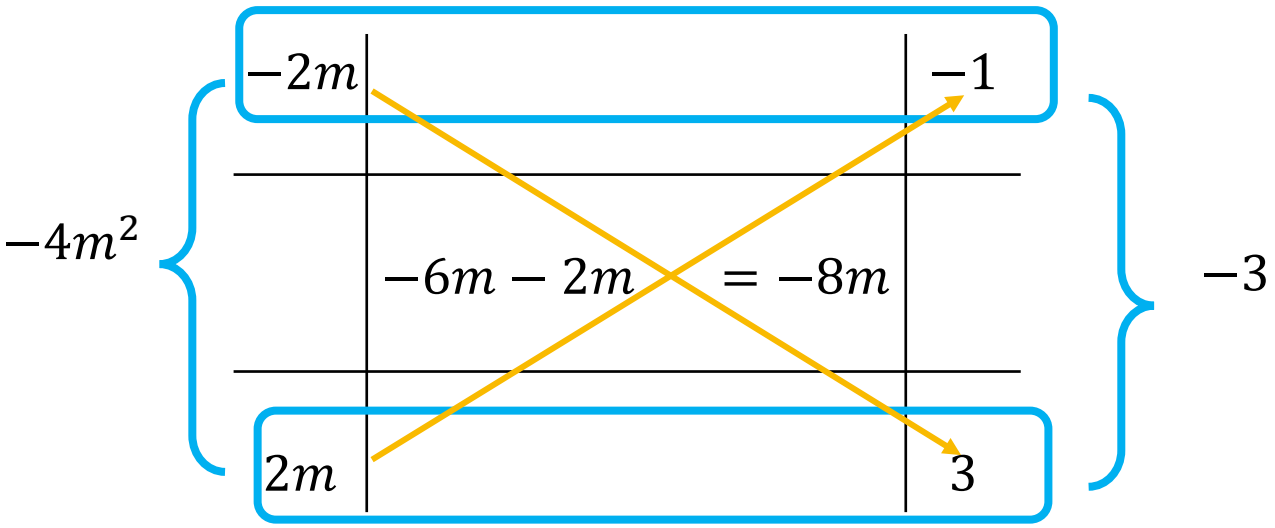
Obtener el discriminante para determinar si el trinomio es factorizable o no.

$$\Delta = (-8)^2 - 4(-4)(-3) = 16$$

Ejemplo #3

Paso 3

Buscar dos valores multiplicados que den $-4m^2$ y dos valores multiplicados que den -3. De manera que al multiplicar en cruz y sumar los términos de como resultado $-8m$.



Ejemplo #3

Paso 4

Dar la factorización de la expresión es:

$$= (-2m - 1)(2m + 3)$$

Paso 5

Sacar un menos a factor común al primer factor.

$$= -(2m + 1)(2m + 3)$$

Paso 6

Dar la respuesta

$$-8m - 4m^2 - 3 = -(2m + 1)(2m + 3)$$

Ejemplo #4

Factorizar la siguiente expresión:

$$y^2 + 8 - 6y$$

Paso 1

Identificar las constantes $a,\ b, c$ del trinomio cuadrado.

$$a = 1 \qquad b = -6 \qquad c = 8$$

Paso 2

Obtener el discriminante

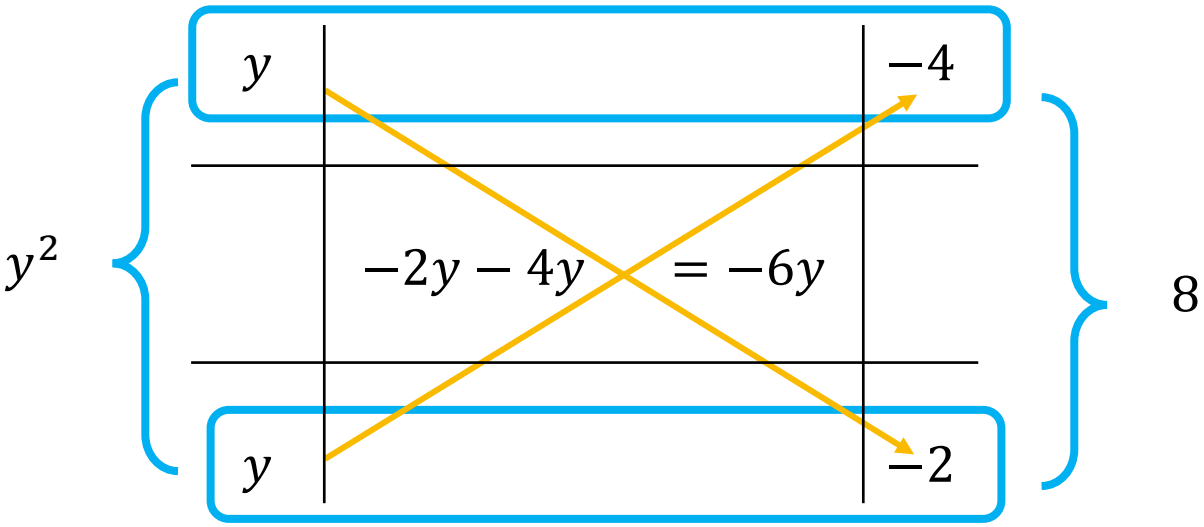
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 16$$

Como el discriminante es mayor a cero, entonces la expresión es factorizable.

Ejemplo #4

Paso 3

Determinar dos valores multiplicados que den y^2 y dos valores multiplicados que den 8. De manera que al multiplicar en cruz y sumar los términos, se obtenga como resultado $-6y$.



Paso 4

Dar la factorización de la expresión algebraica es:

$$y^2 + 8 - 6y = (y - 4)(y - 2)$$

Diferencia de cuadrados

Para este método, se hace uso de la fórmula notable:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La factorización por medio de diferencia de cuadrados corresponde al producto de dos binomios conjugados, conformados por la raíces cuadradas de cada uno de los términos.

Ejemplo #1

Factorizar la siguiente expresión:

$$25x^2 - 49$$

Paso 1

Identificar si a la expresión algebraica se le puede aplicar diferencia de cuadrados.

Paso 2

Obtener la raíz cuadrada de cada uno de los términos.

$$\sqrt{25x^2} = 5x \qquad \sqrt{49} = 7$$

Ejemplo #1

Paso 3

Formar los binomios conjugados

$$= (5x - 7)(5x + 7)$$

Paso 4

Dar la factorización de la expresión es:

$$25x^2 - 49 = (5x - 7)(5x + 7)$$

Ejemplo #2

Factorizar la siguiente expresión:

$$-16m^2 + 9$$

Paso 1

Identificar si la expresión algebraica se le puede aplicar diferencia de cuadrados.

Paso 2

Reacomodar la expresión para aplicar el método de factorización.

$$= 9 - 16m^2$$

Ejemplo #2

Paso 3

Obtener la raíz cuadrada de cada uno de los términos.

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16m^2} = 4m$$

Paso 4

Formar los binomios conjugados

$$= (3 - 4m)(3 + 4m)$$

Paso 5

Dar la factorización de la expresión es:

$$-16m^2 + 9 = (3 - 4m)(3 + 4m)$$

Ejemplo #3

Factorizar la siguiente expresión:

$$z^2 - (5x - 2)^2$$

Paso 1

Identificar si la expresión algebraica se le puede aplicar diferencia de cuadrados.

Paso 2

Obtener la raíz cuadrada de cada término

$$\sqrt{z^2} = z \qquad \sqrt{(5x-2)^2} = (5x - 2)$$

Ejemplo #3

Paso 3

Formar los binomios conjugados

$$= [z - (5x - 2)][z + (5x - 2)]$$

Paso 4

Resolver las operaciones con polinomios, de cada uno de los factores.

$$= (z - 5x + 2)(z + 5x - 2)$$

Paso 5

Dar la factorización de la expresión es:

$$z^2 - (5x - 2)^2$$
$$= (z - 5x + 2)(z + 5x - 2)$$

Suma y resta de cubos

La factorización de suma y diferencia de cubos está conformado por un producto de un binomio y un trinomio.

El binomio esta conformado por la suma o resta de las raíces cúbicas de cada uno de los términos.

Además, se hace uso de las siguientes fórmulas:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo #1

Factorizar las siguientes expresiones:

$$\mathbf{125x^3 - 343n^3}$$

Paso 1

Identificar si a la expresión algebraica se le puede aplicar diferencia o suma de cubos.

Paso 2

Obtener la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{125x^3} = 5x \qquad \sqrt[3]{343n^3} = 7n$$

Ejemplo #1

Paso 3

Formar el primer binomio, para ello se debe mantener el orden de las expresiones.

$$(5x - 7n)$$

Paso 4

Formar el segundo el factor, haciendo uso de la fórmula $a^2 + ab + b^2$.

$$(5x)^2 + (5x)(7n) + (7n)^2$$

$$= 25x^2 + 35xn + 49n^2$$

Ejemplo #1

Paso 5

Formar la factorización

$$= (5x - 7n)(25x^2 + 35xn + 49n^2)$$

Paso 6

Dar la respuesta

$$125x^3 - 343n^3$$
$$= (5x - 7n)(25x^2 + 35xn + 49n^2)$$

Ejemplo #2

Factorizar la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{8m^4 + 27mh^3}$$

Paso 1

Sacar una m a factor común

$$= m(8m^3 + 27h^3)$$

Paso 2

El segundo factor, se le puede aplicar la suma de cubos.

Ejemplo #2

Paso 3

Obtener la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{8m^3} = 2m \qquad \sqrt[3]{27h^3} = 3h$$

Paso 4

Formar el primer binomio, para ello se debe mantener el signo operatorio y el orden de los términos.

$$= (2m + 3h\,)$$

Ejemplo #2

Paso 5

Formar el segundo factor, para ello se debe hacer uso de la fórmula $a^2 - ab + b^2$

$$= (2m)^2 - (2m)(3h) + (3h)^2$$

$$= 4m^2 - 6mh + 9h^2$$

Paso 6

Formar la factorización de la expresión es:

$$= m(2m + 3h)(4m^2 - 6mh + 9h^2)$$

Paso 7

Dar la respuesta

$$m^4 + 27mh^3$$

$$= m(2m + 3h)(4m^2 - 6mh + 9h^2)$$

Teorema del factor

Este método se utiliza para factorizar polinomios de una sola variable de grado mayor o igual a tres.

El teorema del factor, hace uso de la división sintética, cuando la división de polinomio tiene como residuo cero.

Ejemplo #1

Factorizar la siguiente expresión:

$$x^3 - 7x + 6$$

Paso 1

Identificar si a la expresión algebraica se le puede aplicar el teorema del factor.

Paso 2

Obtener los diferentes divisores de 6

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Ejemplo #1

Paso 3

Obtener los ceros del polinomio

$x = 1$

$$(1)^3 - 7(1) + 6 = 0$$

$x = -1$

$$(-1)^3 - 7(-1) + 6 = 12$$

$x = 2$

$$(2)^3 - 7(2) + 6 = 0$$

Ejemplo #1

Paso 4

Aplicar la división sintética con $x = 1$ y $x = 2$

x^3	x^2	x	#	
1	**0**	**−7**	**6**	**1** → $(x-1)$
	1	1	−6	
1	**1**	**−6**	0	
	2	6	2	→ $(x-2)$
1	**3**	0		

$(\boldsymbol{x+3})$

Paso 5

Dar la factorización de la expresión es:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Agrupamiento

Este método consiste en formar grupos o agrupar términos que tengan algo en común o bien se pueda aplicar algún método de factorización.

Luego factorizar cada grupo, y finalmente, se obtiene el factor común de la expresión resultante.

Generalmente, se aplica en polinomios de varias variables.

Ejemplo #1

Factorizar la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{3ab - 5bx + 6ay - 10xy}$$

Paso 1

Identificar si se puede aplicar el método de agrupamiento.

Paso 2

Agrupar algunos términos de la expresión, con la finalidad de aplicar alguno de los métodos de factorización.

$$(3ab + 6ay) + (-5bx - 10xy)$$

Ejemplo #1

Paso 3

Aplicar factor común a cada uno de los subgrupos.

$$= 3a(b + 2y) - 5x(b + 2y)$$

Paso 4

Aplicar factor común a la expresión

$$= (b + 2y)(3a - 5x)$$

Paso 5

Dar la factorización de la expresión es:

$$3ab - 5bx + 6ay - 10xy$$

$$= (b + 2y)(3a - 5x)$$

Ejemplo #2

Factorizar la siguiente expresión:

$$\mathbf{25 - x^2 + 6xy - y^2}$$

Paso 1

Identificar si se puede aplicar el método de factorización de agrupamiento.

Paso 2

Agrupar los términos de la expresión, con la finalidad de aplicar alguno de los métodos de factorización.

$$= 25 - (x^2 - 6xy + y^2)$$

Ejemplo #2

Paso 3

Al subgrupo, se le puede aplicar inspección

$$= 25 - (x - 3y)^2$$

Paso 4

Aplicar diferencia de cuadrados

$$= \big(5 - (x - 3y)\big)\big(5 + (x - 3y)\big)$$

$$= (5 - x + 3y)(5 + x - 3y)$$

Paso 5

Dar la respuesta

$$25 - x^2 + 6xy - y^2$$

$$= (5 - x + 3y)(5 + x - 3y)$$

Al finalizar con este material, se espera que estos ejercicios le sean de utilidad para reforzar los conceptos necesarios acerca la factorización de expresiones algebraicas, y así, construir los nuevos conocimientos de Cálculo I.

"Libre , y para mi sagrado es el derecho de pensar… La educación es fundamental para la felicidad social; es el principio en el que descansa la libertad y el engrandecimiento de los pueblos."

Benito Juárez

Créditos

Universidad Técnica Nacional

Coordinación de Matemáticas y Estadística

Contenido

Autor: Evelyn Delgado Carvajal

Producción del recurso didáctico:

Productora académica: Yetty Lara Alemán

Diseño Gráfico y multimedia: Karol González Ugalde

Derecho de Autor

Queda prohibida la reproducción, transformación, distribución y comunicación pública de la obra multimedia [Factorización], por cualquier medio o procedimiento, conocido o por conocerse, sin el consentimiento previo de los titulares de los derechos, así como de las obras literarias, artísticas o científicas particulares que contiene.

Universidad Técnica Nacional

cfpte Centro de Formación Pedagógica y Tecnología Educativa

Tecnología Educativa y Producción de Recursos Didácticos CFPTE - UTN