Unidad 7

Aplicación de máximos y mínimos

Objetivos

Al terminar la unidad, el alumno:

- Interpretará el concepto de ingreso y costos marginal.
- Aplicará la función de ingresos en problemas de maximización.
- Aplicará la función de beneficios en problemas de maximización.
- Aplicará la función de costos en problemas de minimización.

Introducción

En matemáticas aplicadas, las funciones lineales y no lineales pueden representar algún criterio para tomar decisiones. Por ejemplo, si una función simboliza las utilidades, los ingresos, costos o el nivel de contaminación de una empresa, y se expresa en términos de alguna variable que afecte su comportamiento, esa variable debe seleccionarse adecuadamente por la persona que va a tomar una decisión con el fin de conseguir un objetivo preestablecido.

Haciendo alusión a lo anterior, si un ejecutivo de una compañía tiene interés en establecer una estrategia que incremente las utilidades, debe seleccionar una variable que afecte a esas utilidades; si efectúa un estudio en el cual descubre que la cantidad de dinero que se gasta en publicidad impacta positivamente a las utilidades, entonces debe formular su estrategia de manera que la publicidad sea parte importante para incrementar las ventas, además de hacerle posible poner límites a la cantidad de dinero que debe gastarse.

Cuando un proyecto económico se lleva a cabo, tal como la obtención de un nivel específico de producción, hay normalmente varias posibilidades para realizarlo. Sin embargo, una (o algunas) de estas opciones será más deseable que otra desde el punto de vista de quien realiza un estudio, por lo que ésta es la esencia del problema de optimización, elegir, sobre la base del criterio seleccionado, la mejor alternativa.

El criterio más común para elegir alternativas en las ciencias sociales tiene como objetivo maximizar algo (la ganancia de una empresa, la utilidad que tiene un producto o servicio para un consumidor, etc.) o minimizar (el costo de producción total o de un producto dado). Económicamente, se clasifica a esos problemas de maximización o minimización bajo el título de optimización, que debe entenderse como la búsqueda de lo mejor. No obstante, matemáticamente, los términos máximo y mínimo no implican una optimización. Es por ello que el término general para máximo y mínimo como conceptos matemáticos, se designa más apropiadamente como valores extremos.

7.1. Maximización de beneficios

Cuando se formula un problema de optimización primero hay que definir la *función objetivo,* en la cual la variable dependiente representa el objeto a maximizar o minimizar y el conjunto de variables independientes indica los elementos que afectan de manera directa o indirecta, los cuales han de tomar ciertos valores dependiendo del problema que se trate.

Uno de los objetivos fundamentales de una empresa es lograr el máximo beneficio (o utilidad, denotado por la letra U). La utilidad o beneficio que espera una empresa es la cantidad monetaria que ha de ganar al vender sus productos y obtener un ingreso $I(x)$ por esa venta, menos la parte que corresponde a solventar los gastos (costos $C(x)$) necesarios para llevar a cabo la producción.

$$U = I(x) - C(x)$$

Resulta obvio que para determinar la utilidad es un requisito conocer tanto el nivel de ingresos que tiene la empresa como el nivel de costos en el que incurre para producir.

El **ingreso $I(x)$** está en función de la cantidad de productos vendidos, es decir, se vende x cantidad de productos a un determinado precio p. En el momento en el cual la cantidad de artículos que se vende se multiplica por su precio, se tiene un monto monetario que caracteriza al ingreso de la empresa, es decir:

$$I(x) = (p)(x)$$

La empresa siempre espera vender la mayor cantidad de artículos que le sea posible a fin de obtener el máximo de ganancia, pero también es cierto que si desea vender tales montos, lo hará con el objetivo de reducir al máximo los costos en los que incurre al llevar a cabo su ciclo productivo, es decir, la empresa espera *optimizar* sus recursos al **maximizar su beneficio** y **minimizar sus costos**.

Maximizar el beneficio de cualquier empresa implica:

1. Maximizar el ingreso, es decir, vender la mayor cantidad de artículos posibles, con un nivel de costos constante.
2. Maximizar el ingreso y reducir el nivel de costos.
3. Minimizar los costos y mantener constante su nivel de ventas de forma que su ingreso no se vea afectado.

Naturalmente, el punto dos sería el ideal para una empresa, pero es el más difícil de lograr, por lo que es común buscar rutas alternativas para que se cumplan en la medida de lo posible los puntos 1 y 3.

Como puede observarse, cuando se quiere maximizar el beneficio se tienen dos posibilidades para lograrlo: minimizar los costos o maximizar el ingreso. Este punto es importante para recalcar que para maximizar el beneficio es necesaria en la mayoría de las ocasiones una maximización del ingreso, punto clave para obtener las mayores ganancias posibles.

En ocasiones no es tan importante sólo conocer los niveles de utilidad o beneficio total de un empresa, sino que interesa más el impacto en las utilidades ante pequeñas variaciones en los insumos, es por eso que al maximizar o minimizar cobra relevancia la **marginalidad de una función**.

Por ejemplo, para una empresa es relevante conocer en qué monto se incrementarán sus costos cuando tiene que producir mayor cantidad de bienes, o bien en qué cantidad se incrementarán sus utilidades cuando crecen sus ingresos.

Así, lo que interesa conocer es el ingreso marginal, el costo marginal y, por lo tanto, la utilidad marginal.

Generalmente, si el ingreso total se iguala al costo total, la utilidad o beneficio será cero, pero si el ingreso marginal se iguala al costo marginal, la utilidad será maximizada o minimizada (véase la figura 7.1). Por ejemplo, una compañía dedicada a la fabricación y comercialización de sillas, vende usualmente una cantidad determinada de sillas x, con un nivel dado de costos ($C(x)$) e ingreso ($I(x)$) y por alguna razón llega a vender una silla más, ante esta situación, si suponemos que la compañía incrementa su ingreso más de lo que crecen sus costos, entonces debe venderse la silla adicional. Si en vez de ello el ingreso crece menos de lo que incrementan sus costos, la silla no debe ser vendida, pero si el incremento en el ingreso se iguala al incremento en el costo, al vender una silla más, se mantiene la ganancia anterior y no se gana ni se pierde por esa venta adicional.

Recordemos que al determinar el máximo de una función se debe obtener la primera derivada de la función para que de esa manera se encuentre la parte marginal, posteriormente se iguala a cero para resolver algebraicamente la ecuación a fin de encontrar el valor de la variable requerida. Una vez que se ha resuelto la ecuación se obtiene la segunda derivada para comprobar si existe un máximo, lo cual ocurre cuando el valor de la segunda derivada es negativa. En el caso de la utilidad, para que ésta sea máxima se requiere que $I'' < C''$.

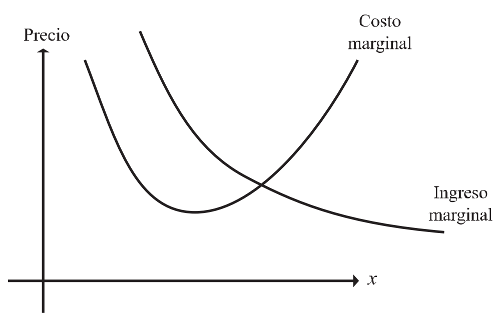


Figura 7.1. Utilidad máxima en costo marginal igual a ingreso marginal.

Ejemplo 1

La demanda de un artículo que produce una compañía varía con el precio que ésta cobra por el artículo. La compañía determinó que los ingresos totales anuales $I(x)$ (en miles de pesos) son una función del precio p (en pesos). Específicamente:

$$I(p) = -50p^2 + 500p$$

a) Determinemos el precio que debe cobrarse con el fin de maximizar los ingresos totales.

b) ¿Cuál es el valor de los ingresos anuales totales?

Solución: a) La función que se nos proporciona es la de ingresos totales, los cuales dependen del precio, mostrándose una función que no es lineal (cuadrática). La primera derivada de la función de ingresos es:

$$I'(p) = -(2)50p + 500 = -100p + 500$$

Esta función muestra el ingreso marginal. Al igualar a cero para cumplir con la condición de primer orden tenemos:

$$-100p + 500 = 0$$

$$p = \frac{500}{100} = 5$$

El precio que la compañía debe cobrar a fin de que el ingreso se maximice es de cinco pesos por unidad.

Para verificar que existe un máximo, se obtiene la segunda derivada:

$$I''(p) = -100$$

$$I''(5) = -100 < 0$$

Al observar que el valor obtenido mediante la segunda derivada es negativo, se comprueba que existe un máximo sobre $I(p)$ en $p = 5$.

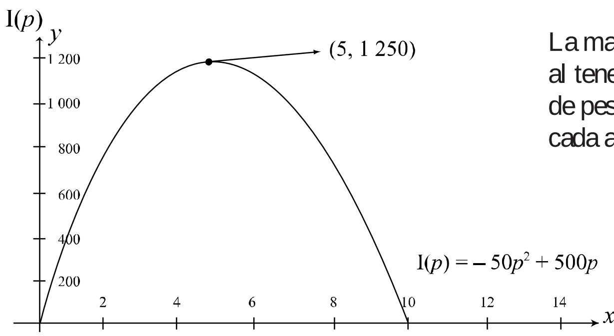
b) El valor de los ingresos totales anuales se encuentra sustituyendo el precio que garantiza la maximización en la función de ingresos totales.

$$I(5) = -50(5)^2 + 500(5) = -50(25) + 2\,500 = -1\,250 + 2\,500 = 1\,250$$

$$I(5) = 1\,250$$

Podemos esperar que los ingresos anuales totales sean máximos en $1 250 miles de pesos cuando la compañía cobra cinco pesos por unidad.

La función tiene la siguiente gráfica:



La maximización del ingreso se da al tener un ingreso de 1 250 miles de pesos y haber vendido a 5 pesos cada artículo.

Figura 7.2. Maximización del ingreso de una compañía.

Ejemplo 2

Una dependencia gubernamental de una ciudad ha estado experimentando con la estructura de precios del pasaje en el sistema de transporte público de microbuses. Abandonó la estructura de precios por zona, en la que el precio variaba dependiendo del número de zonas a través de las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema requiere precios fijos en el cual el pasajero puede viajar a cualquier punto de la ciudad por el mismo precio.

La dependencia realizó una encuesta entre los ciudadanos para determinar el número de personas que utilizarán el sistema de microbuses si el precio fijo es igual para diferentes distancias. A partir de los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas determinaron una función de demanda aproximada que expresa el número de pasajeros diarios como función del precio a cobrar. La función de demanda es:

$$x(p) = 1\,000 - 125p$$

Donde x es el número de pasajeros al día y p es el costo en pesos.

a) Determinemos el precio que debe cobrarse con el fin de maximizar el ingreso diario a partir del precio del pasaje.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?
c) ¿Cuántos pasajeros al día se espera que viajen al pagar esta tarifa?

Solución: a) El primer paso es determinar una función que establezca el ingreso en función del precio p. La razón por la cual se selecciona p como variable independiente es que el problema es determinar el precio que producirá el ingreso. Además, se considera al precio como una variable de decisión, una variable cuyo valor puede ser decidido por la dependencia gubernamental.

La expresión para determinar los ingresos totales es $I(p) = (p)(x)$

En este caso, I está dado como función de dos variables, p y x. La función de demanda establece una relación entre las variables p y x, donde la demanda x se expresa en términos del precio p. Si sustituimos la función de demanda en la fórmula para calcular el ingreso total I, el ingreso queda en función del precio, con ello tenemos:

$$x(p) = 1\,000 - 125p$$

$$I(p) = p\,x(p)$$

$$I(p) = p(1\,000 - 125p) = 1\,000\,p - 125p^2$$

En este momento contamos con una función de ingresos con respecto al precio. Su primera derivada es:

$$I'(p) = 1\,000 - (2)125p = 1\,000 - 250\,p$$

Igualando a cero obtenemos:

$$1\,000 - 250\,p = 0$$

$$p = \frac{1\,000}{250} = 4$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar la existencia de un máximo:

$$I''(p) = -250$$

$$I''(4) = -250 < 0$$

Existe un máximo para $I(p)$ cuando $p = 4$, es decir, los ingresos diarios serán maximizados cuando se cobre una cuota fija de cuatro pesos.

b) Obtenemos el ingreso máximo esperado al sustituir el precio que maximiza el ingreso.

$$I(4) = 1\,000(4) - 125(4)^2 = 4\,000 - 125(16) = 4\,000 - 2\,000$$

$$I(4) = 2\,000$$

Como el precio se indica en pesos, los ingresos diarios máximos esperados son de dos mil pesos.

c) El número de pasajeros que se espera cada día con una tarifa p de cuatro pesos, lo encontramos sustituyendo el valor de p en la función de demanda:

$$p = 4$$

$$x(p) = 1\,000 - 125p = 1\,000 - 125(4) = 1\,000 - 500 = 500$$

Con una tarifa de cuatro pesos se obtiene un ingreso máximo de dos mil pesos, con quinientas personas que viajan.

La gráfica que representa lo anterior es:

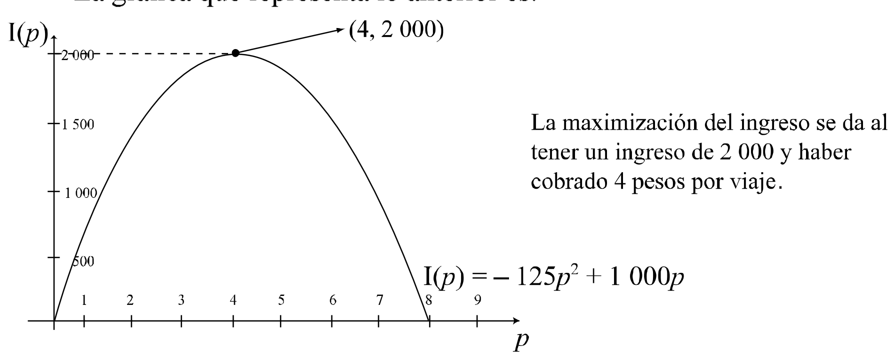


Figura 7.3. Maximización del ingreso de una dependencia gubernamental.

Ejemplo 3

Una empresa que se dedica a prestar servicios de consultoría sobre aspectos publicitarios a diversas empresas que desean incrementar sus ventas anunciando sus productos en diversos medios realizó encuestas acerca de los costos de publicidad y determinó que las funciones de costos al tomar en cuenta los costos de publicidad y de demanda de servicios de consultoría, son:

$$C(x) = 1\,200 + 25x - 0.0001x^2 \qquad p(x) = 55 - \frac{x}{1000}$$

Donde en la función de costos, $C(x)$ es el costo de prestar x servicios al considerar los costos de publicidad, y en la función de demanda p es el precio de cada servicio que se prestó y x es el número de servicios prestados.

a) Determinemos el número de servicios que maximiza la ganancia.
b) Calculemos el precio que garantiza la maximización de la ganancia si el precio está en miles de pesos.

Solución: a) Como se proporciona una función de demanda es necesario que la expresemos como una función de ingresos, quedándonos:

$$I(x) = x\,p(x)$$

$$p(x) = 55 - \frac{x}{1\,000}$$

$$I(x) = x\,p(x) = x\left(55 - \frac{x}{1\,000}\right) = 55x - \frac{x^2}{1\,000}$$

Obtengamos la primera derivada de las funciones de costo e ingreso para calcular las funciones de costo marginal e ingreso marginal y recordemos que la maximización involucra que el costo marginal se iguale al ingreso marginal, por lo que tenemos:

El costo marginal es $C'(x) = 25 - (2)0.0001x = 25 - 0.0002x$

El ingreso marginal es $I'(x) = 55 - \dfrac{2x}{1\,000} = 55 - \dfrac{x}{500}$

Por lo tanto, el ingreso marginal es igual al costo marginal cuando:

$$55 - \frac{x}{500} = 25 - 0.0002x$$

Despejando y resolviendo para encontrar x tenemos:

$$55 - 25 = \frac{x}{500} - 0.0002x\,; \quad 55 - 25 = \frac{x}{500} - \frac{0.0002x(500)}{500}$$

$$30 = \frac{x}{500} - \frac{0.1x}{500} = \frac{x - 0.1x}{500} = \frac{0.9x}{500}$$

$$30 = \frac{0.9x}{500}$$

$$0.9x = (30)(500) = 15\,000$$

$$x = \frac{15\,000}{0.9}$$

$$x = 16\,666.67 \cong 16\,667$$

Con objeto de comprobar que se produce un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$C''(x) = -0.0002$$

$$I''(x) = -\frac{1}{500} = -0.002$$

Aquí observamos que cuando la compañía presta 16 667 servicios de consultoría, la utilidad será maximizada dado que $I''(16\,667) < C''(16\,667)$.

b) Obtenemos el precio que maximiza la ganancia sustituyendo la cantidad de unidades producidas en la función de demanda:

$$x = 16\,667$$

$$p(16\,667) = 55 - \frac{16\,667}{1\,000} = 55 - 16.667 = 38.333$$

El precio que garantiza la maximización de la utilidad con 16 667 servicios de consultoría prestados es de $38 333.

Ejemplo 4

Una compañía realizó un estudio sobre sus ingresos y los costos en los que ha incurrido a fin de maximizar su ganancia. Si las funciones de costos y demanda que encontró la firma son:

$$C(x) = 380\,000 + 5x - \frac{x^2}{100} \qquad \text{y} \qquad p(x) = 350 - \frac{3x}{50},$$

donde en la función de costos, $C(x)$ es el costo de producir x unidades, y en la función de demanda p es el precio de venta y x es el número de unidades vendidas.

a) Determinemos el nivel de producción que maximiza la ganancia.
b) Calculemos el precio que garantiza la maximización de la ganancia.
c) Obtengamos el ingreso total, el costo total y la utilidad total partiendo de los valores que maximizan la ganancia.

Solución: a) Como se proporciona una función de demanda, es necesario expresarla como una función de ingresos, quedándonos:

$$I(x) = x\,p(x)$$

$$p(x) = 350 - \frac{3x}{50}$$

$$I(x) = x\,p(x) = x\left(350 - \frac{3x}{50}\right) = 350x - \frac{3x^2}{50}$$

Cuando calculamos la primera derivada tenemos que:

El costo marginal es $C'(x) = 5 - \frac{2x}{100} = 5 - \frac{x}{50}$

El ingreso marginal es $I'(x) = 350 - \frac{6x}{50}$

Si igualamos el ingreso marginal al costo marginal obtenemos:

$$350 - \frac{6x}{50} = 5 - \frac{x}{50}$$

$$350 - 5 = \frac{6x}{50} - \frac{x}{50}$$

$$345 = \frac{6x}{50} - \frac{x}{50} = \frac{6x - x}{50} = \frac{5x}{50}$$

$$345 = \frac{5x}{50}$$

$5x = (345)(50) = 17\ 250$

$$x = \frac{17\ 250}{5}$$

$x = 3\ 450$

Para comprobar que se produce un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$C''(x) = -\frac{1}{50}$$

$$I''(x) = -\frac{3}{25}$$

Como $U''(x) = I''(x) - C''(x) < 0$ para todos los valores de x, se produce un máximo, es decir, cuando la compañía produce 3 450 unidades, la utilidad será maximizada.

b) Calculamos el precio que maximiza la ganancia al sustituir la cantidad de unidades producidas en la función de demanda:

$x = 3\ 450$

$$p(3\ 450) = 350 - \frac{(3)3\ 450}{50} = 350 - 207 = 143$$

El precio que garantiza la maximización de la utilidad con un nivel de producción de 3 450 unidades es de $143.

c) El costo total, el ingreso total y la utilidad total son:

$$C(3\ 450) = 380\ 000 + 5(3\ 450) - \frac{(3\ 450)^2}{100}$$

$$= 380\,000 + 17\,250 - \frac{11\,902\,500}{100} = 397\,250 - 119\,025$$

$$C(x) = 278\,225$$

El costo total que garantiza la maximización de la utilidad es de 278 225.

$$I(3\,450) = 350(3\,450) - \frac{(3)(3\,450)^2}{50} = 1\,207\,500 - \frac{35\,707\,500}{50}$$

$$= 1\,207\,500 - 714\,150$$

$$I(3\,450) = 493\,350$$

El ingreso total que garantiza la maximización de la utilidad es de 493 350.

Como la utilidad es la diferencia entre el ingreso total y el costo total:

$$U = I(x) - C(x) = 493\,350 - 278\,225$$

$$U = 215\,125$$

Con un nivel de producción de 3 450 unidades vendidas a un precio de $143, la utilidad que se obtendrá es de $215 125.

Ejercicio 1

1. Una compañía determinó que los ingresos totales están en función del precio cobrado por su producto. La función de ingresos totales es $I(p) = -25p^2 + 875p$. Donde p es el precio en pesos:

a) Determina el precio que maximiza los ingresos totales.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

2. La función de demanda de una compañía es $x(p) = 50\,000 - 25p$

En donde x es el número de unidades demandadas y p es el precio en pesos.

a) Determina el precio que debe cobrarse para maximizar los ingresos totales.
b) ¿De cuántas unidades se espera que sea la demanda?

3. Las funciones de costo y de demanda para un empresa dedicada a la venta de seguros de vida son:

$$C(x) = 680 - 4x + 0.01x^2 \qquad p(x) = 12 - \frac{x}{500}$$

Donde p es precio, x número de unidades.

a) Determina el nivel de producción que maximiza la utilidad.
b) Obtén el precio que maximiza la utilidad y por tanto los ingresos.
c) Calcula el ingreso total, el costo total y la utilidad.

4. Una compañía hotelera realizó diversas encuestas entre sus huéspedes acerca de las comodidades que les agradaría tuvieran esos hoteles. Con ello, estableció una función de costos considerando tales requerimientos y, al mismo tiempo, determinó una función de demanda de sus servicios a fin de conocer qué tan benéfico resulta para los hoteles introducir mejoras y de esa manera maximizar sus utilidades. Las funciones de costo y precio son:

$$C(x) = 1\,450 + 36x + 0.01x^2 \qquad p(x) = 60 - 0.01x$$

Donde x es el número de huéspedes que debe tener el hotel para maximizar la ganancia y p es el precio que debe cobrarse por habitación por día.

a) Determina la cantidad de huéspedes que debe haber para maximizar la ganancia.
b) Calcula el precio que ha de garantizar la maximización de la ganancia.
c) Obtén el ingreso total que ha de obtener el hotel, así como el costo total y la utilidad.

5. La función de utilidad para una compañía es $U(x) = -4x^2 + 2\,000x - 1\,000$. Donde x es el nivel de producción.

a) Determina el nivel de producción necesario para maximizar las utilidades.
b) Calcula la utilidad máxima.

6. Un vendedor en un estadio de futbol determinó que la cantidad de dinero que gastan los espectadores en las concesiones depende del número de puestos de concesionarios que trabajen. La función es $I(x) = -20x^2 + 400x$

En donde $I(x)$ son las ventas de los concesionarios por juego (en cientos de pesos) y x es el número de puestos en operación.

a) Determina el número de puestos que tendrá por resultado las ventas máximas por juego.
b) El valor máximo de las ventas.

7.2. Minimización de costos

Dentro de una empresa, y casi en cualquier actividad que realizan los individuos, se tienen que hacer gastos para adquirir o producir algo. Esos gastos involucran un desembolso en términos monetarios que se realiza para satisfacer alguna necesidad. Tales gastos son considerados como costos, los cuales, si se piensa en una empresa, se refieren a los pagos que han de hacerse al personal ocupado, las materias primas y otros insumos que son necesarios para realizar una actividad que va encaminada a la obtención de un producto o servicio y cuya producción está encaminada a satisfacer diversas necesidades para los individuos. En el caso de los individuos, el costo se refiere a todo desembolso que tienen que hacer para satisfacer sus necesidades.

Una empresa, al fabricar productos, incurre en ciertos costos que dependerán de la cantidad de productos que fabrica debido a que, según el nivel de producción que mantenga, será requerida más cantidad de insumos y mano de obra. En ese sentido, se maneja una función de costo total $C(x)$, donde C es función de x (la cantidad de producción).

Lo importante para una empresa es que sus costos sean lo más pequeños posibles, es decir, lo que siempre se busca es minimizar el costo, ya sea el costo total o el costo promedio (por unidad). Si lo que se busca es minimizar el costo promedio, la condición básica que debe cumplirse es igualarse el costo marginal al costo promedio.

Análogamente al caso de maximización del ingreso o de la utilidad, la minimización implica que al tenerse una función de costo total, se debe obtener la primera derivada para definir el valor que minimiza a tal función igualando a cero para conocer la solución algebraica de la ecuación y posteriormente obtener la segunda derivada que debe tener un valor positivo que garantice la minimización.

El costo promedio debe considerarse como el costo de producir una unidad y se calcula dividiendo el costo total entre el número total de artículos producidos. De esta manera se tiene:

$$\textbf{Costo promedio} = C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

como $C'_m(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$ para minimizarlo se tiene $xC'(x) - C(x) = 0$ de

donde $C'(x) = \dfrac{C(x)}{x} = C_m(x)$

Ejemplo 5

Una empresa desea reducir sus costos lo más posible a fin de obtener mayores utilidades y hacer que el precio de sus artículos sea más bajo que los de la competencia y posicionarse de mejor manera en el mercado. Para ello calcula que el costo de producción de x artículos es:

$$C(x) = 2\,600 + 2x + 0.001x^2$$

a) Determinemos el nivel de producción en el cual será mínimo el costo promedio.
b) Calculemos el costo promedio y el costo total.

Solución: a) La función de costo total es $C(x) = 2\,600 + 2x + 0.001x^2$, por lo que para encontrar el nivel de producción que minimiza el costo obtenemos la primera derivada quedando:

$$C'(x) = 2 + (2)0.001x$$
$$C'(x) = 2 + 0.002x$$

Esta primera derivada define al costo marginal. Como se quiere minimizar el costo promedio es necesario igualar el costo promedio al costo marginal. El costo promedio es:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2\,600}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{0.001x^2}{x}$$

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2\,600}{x} + 2 + 0.001x$$

Igualando $C'(x)$ con $C_m(x)$:

$$2+0.002x=\frac{2\ 600}{x}+2+0.001x$$

Al resolver tenemos:

$$2-2+0.002x-0.001x=\frac{2\ 600}{x}$$

$$0.001x=\frac{2\ 600}{x}$$

$$x^2=\frac{2\ 600}{0.001}=2\ 600\ 000$$

$$x=\sqrt{2\ 600\ 000}=1\,612.4515\cong 1\ 612$$

Para comprobar que este nivel de producción es un mínimo se obtiene la segunda derivada de la función de costo promedio.

La función de costo promedio es:

$$C_m(x)=\frac{2\ 600}{x}+2+0.001x=2\ 600x^{-1}+2+0.001x$$

La primera derivada es:

$$C_m'(x)=(-1)2\ 600x^{-2}+0.001=-2\ 600x^{-2}+0.001$$

La segunda derivada es:

$$C_m''(x)=-(-2)2\ 600x^{-3}=5\ 200x^{-3}$$

$$C_m''(x)=\frac{5\ 200}{x^3}\ >0$$

Se puede observar que en el resultado de la segunda derivada al sustituir cualquier valor positivo de x, el resultado siempre será positivo, lo que garantiza la existencia de un mínimo. De aquí se puede apreciar que el nivel de producción necesario para minimizar el costo promedio es de 1 612 unidades.

b) Con una producción de 1 612, calculamos el costo promedio y el costo total.

El costo promedio mínimo es:

$$C_m(1\ 612)=\frac{2\ 600}{1\ 612}+2+0.001(1\ 612)=1.6129+2+1.612$$

$$C_m(1\ 612)=5.22$$

El costo promedio mínimo por artículo es de \$5.22.

El costo total es $C(1\,612) = 2\,600 + 2(1\,612) + 0.001(1\,612)^2$

$$C(1\,612) = 8\,422.544$$

El costo total al producir 1 612 artículos es de \$8 422.5.

Ejemplo 6

Una compañía dedicada a la elaboración de anuncios publicitarios decidió establecer una estrategia para reducir sus costos y, de esa manera, además de asegurar que se incrementen sus utilidades, reduce el precio para los contratantes del servicio. Después de realizar diversos estudios, la compañía obtuvo la siguiente función de costo:

$$C(x) = 10\,000 + 25x + x^2$$

x es número de unidades

a) Determinemos el número de servicios que minimiza el costo promedio.
b) Calculemos el costo promedio mínimo y el costo total.

Solución: a) La función de costo marginal se obtiene con su primera derivada:

$$C'(x) = 25 + 2x$$

El costo promedio es:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10\,000}{x} + \frac{25x}{x} + \frac{x^2}{x}$$

$$C_m(x) = \frac{10\,000}{x} + 25 + x$$

Igualando $C'(x)$ con $C_m(x)$ tenemos:

$$25 + 2x = \frac{10\,000}{x} + 25 + x$$

$$25 - 25 + 2x - x = \frac{10\,000}{x}$$

$$x^2 = 10\ 000$$

$$x = \sqrt{10\ 000} = 100$$

Calculamos la segunda derivada de la función de costo promedio para comprobar que este nivel de producción es un mínimo.

La función de costo promedio es $C_m(x) = \dfrac{10\ 000}{x} + 25 + x = 10\ 000x^{-1} + 25 + x$

La primera derivada es $C_m'(x) = (-1)10\ 000x^{-2} + 1 = -10\ 000x^{-2} + 1$

La segunda derivada es $C_m''(x) = -(-2)10\ 000x^{-3} = 20\ 000x^{-3}$

$$C_m''(x) = \frac{20\ 000}{x^3}$$

Si sustituimos cualquier valor positivo de x, el resultado siempre será positivo, lo que garantiza la existencia de un mínimo. De aquí se puede apreciar que el número de anuncios publicitarios necesario para minimizar el costo promedio es de 100.

b) Con un número de anuncios publicitarios de 100, se calcula el costo promedio y el costo total.

El costo mínimo promedio es $C_m(100) = \dfrac{10\ 000}{100} + 25 + 1(100) = 100 + 25 + 100$

$$C_m(100) = 225$$

El costo promedio mínimo por anuncio es de \$225.

El costo total es $C(100) = 10\ 000 + 25(100) + (100)^2$

$$C(100) = 22\ 500$$

El costo total por publicar 100 anuncios es de \$22 500.

Ejercicio 2

1. Con la siguiente función de costo $C(x) = 45 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{560}$ donde x es la cantidad de unidades producidas

a) Determina la cantidad de unidades producidas que minimizan el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

2. Sabiendo que x es la cantidad producida de una empresa y que se tiene la función de costos $C(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{8\,000}$

a) Determina la cantidad de unidades producidas que minimizan el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

3. Con la función de costos $C(x) = 150\,000 + 100x + 0.003x^2$ donde x es la cantidad de unidades producidas

a) Determina la cantidad de unidades producidas que minimizan el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

4. Una compañía cuenta con la función de costos $C(x) = 200 + \frac{x^2}{5} + 50x$ donde x es la cantidad de unidades producidas

a) Determina la cantidad de unidades producidas que minimizan el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

5. Una tienda departamental determinó que sus utilidades disminuyeron a pesar de tener incrementos en su ingreso, por lo que encargó al departamento de planeación que investigara las causas. Después de realizar la investigación se concluyó que los costos se incrementaron por la mala ejecución de los planes de venta, lo cual produjo que disminuyera la cantidad de artículos que están a la venta y se mantuvieran más tiempo en almacén. Esto incrementó el costo de almacén, por lo que se hizo la recomendación de que se corrigieran las fallas y de esa manera reducir los costos. Se encontró la siguiente función de costos:

$C(x) = 2\,000 + 10x + 0.01x^3$, donde x es la cantidad de artículos a la venta.

a) Determina la cantidad de artículos que deben venderse a fin de reducir los costos promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

Ejercicios resueltos

1. Las funciones de costo y demanda en una tienda departamental son:

$C(x) = 900 + 110x - 0.1x^2$; $p(x) = 260 - 0.2x$
Donde x es el número de artículos y $p(x)$ representa el precio por artículo.

a) Determinemos el número de artículos que maximiza la ganancia.
b) Calculemos el precio que garantiza la maximización de la ganancia.

Solución: a) Si expresamos la función de ingreso como una función de la demanda, tenemos:

$$I(x) = x\,p(x)$$
$$p(x) = 260 - 0.2\,x$$
$$I(x) = x\,(260 - 0.2x) = 260x - 0.2x^2$$

El costo marginal es $C'(x) = 110 - (2)0.1x = 110 - 0.2x$

El ingreso marginal es $I'(x) = 260 - (2)0.2x = 260 - 0.4x$

Igualamos el ingreso marginal al costo marginal y tenemos:

$$260 - 0.4x = 110 - 0.2x$$

$$260 - 110 = 0.4x - 0.2x$$

$$150 = 0.2x$$

$$x = \frac{150}{0.2}$$

$$x = 750$$

Calculamos la segunda derivada:

$$C''(x) = -0.2$$

$$I''(x) = -0.4$$

Como son negativos es máximo.

Cuando la tienda departamental vende 750 artículos, la utilidad será maximizada.

b) Obtenemos el precio que maximiza la ganancia:

$$x = 750$$

$$p(750) = 260 - 0.2(750) = 260 - 150 = 110$$

El precio que garantiza la maximización de la utilidad con 750 unidades vendidas es de $110 por unidad.

2. Para las siguientes funciones de costo y demanda de una empresa:

$C(x) = 10\,000 + 48x - 0.01x^2$; $p(x) = 90 - 0.05x$

Donde x es el número de unidades y $p(x)$ representa el precio por unidad.

a) Determinemos el nivel de producción que maximiza la ganancia.
b) Calculemos el precio que garantiza la maximización de la ganancia.

Solución: a) Como se proporciona una función de demanda, es necesario expresarla como una función de ingresos, quedando:

$$I(x) = x\,p(x)$$

$$p(x) = 90 - 0.05x$$

$$I(x) = x(90 - 0.05x) = 90x - 0.05x^2$$

$$I(x) = 90x - 0.05x^2$$

El costo marginal es $C'(x) = 48 - (2)0.01x = 48 - 0.02x$

El ingreso marginal es $I'(x) = 90 - (2)0.05x = 90 - 0.1x$

Cuando igualamos el ingreso marginal al costo marginal obtenemos:

$$90 - 0.1x = 48 - 0.02x$$

$$90 - 48 = 0.1x - 0.02x$$

$$42 = 0.08x$$

$$x = \frac{42}{0.08}$$

$$x = 525$$

Comprobamos que hay un máximo al calcular la segunda derivada:

$$C''(x) = -0.02$$

$$I''(x) = -0.1$$

Con un nivel de producción de 525 unidades, la utilidad será maximizada.

b) El precio que maximiza la ganancia se obtiene al sustituir la cantidad de unidades producidas en la función de demanda.

$$x = 525$$

$$p(525) = 90 - 0.05(525) = 90 - 26.25 = 63.75$$

El precio que garantiza la maximización de la utilidad con 525 unidades producidas es de $63.75 por unidad.

3. El número de dólares del costo total de fabricación de x relojes en una fábrica está dado por $C(x) = 1\,500 + 3x + x^2$

a) Determinemos la cantidad de relojes que minimiza el costo promedio.
b) Calculemos el costo promedio mínimo y el costo total.

Solución: a) Obtenemos su primera derivada:

$$C'(x) = 3 + 2x$$

El costo promedio es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{1\,500}{x} + \dfrac{3x}{x} + \dfrac{x^2}{x}$

$$C_m(x) = \frac{1\,500}{x} + 3 + x$$

Igualamos $C'(x)$ con $C_m(x)$:

$$3 + 2x = \frac{1\,500}{x} + 3 + x$$

$$3 - 3 + 2x - x = \frac{1\,500}{x}$$

$$x^2 = 1\,500$$

$$x = \sqrt{1\,500} = 38.7298 \cong 39$$

Comprobamos que este nivel de producción es un mínimo, al obtener la segunda derivada de la función de costo promedio.

La función de costo promedio es $C_m(x) = \dfrac{1\,500}{x} + 3 + x = 1\,500x^{-1} + 3 + x$

Su primera derivada es $C_m'(x) = (-1)1\,500x^{-2} + 1 = -1\,500x^{-2} + 1$

La segunda derivada es $C_m''(x) = -(-2)1\,500x^{-3} = 3\,000x^{-3}$

$$C_m''(x) = \frac{3\,000}{x^3}$$

Se garantiza la existencia de un mínimo dado que x es positiva. De aquí se puede apreciar que el número de relojes necesarios para minimizar el costo promedio es de 39.

b) Con un número de relojes producidos de 39, se calcula el costo promedio y el costo total.

El costo mínimo promedio es $C_m(39) = \dfrac{1\,500}{39} + 3 + 39 = 38.46 + 42$

$$C_m(39) = 80.46$$

El costo mínimo promedio por reloj producido es de \$80.46.

El costo total es $C(39) = 1\,500 + 3(39) + (39)^2$

$$C(39) = 3\,138$$

El costo total al producir 39 relojes es de \$3 138.

4. Si $C(x)$ es el costo total por fabricar x sillas, y tenemos:

$$C(x) = x^2 + 40x + 800$$

a) Determinemos la cantidad de sillas que minimiza el costo promedio.
b) Calculemos el costo promedio mínimo y el costo total.

Solución: a) Calculamos la primera derivada $C'(x) = 2x + 40$

El costo promedio es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{40x}{x} + \dfrac{800}{x}$

$$C_m(x) = x + 40 + \frac{800}{x}$$

Igualamos $C'(x)$ con $C(x)$:

$$2x + 40 = x + 40 + \frac{800}{x}$$

$$40 - 40 + 2x - x = \frac{800}{x}$$

$$x^2 = 800$$

$$x = \sqrt{800} = 28.28 \cong 28$$

Obtenemos la segunda derivada de la función de costo promedio.

La función de costo promedio es $C_m(x) = x + 40 + \dfrac{800}{x} = x + 40 + 800x^{-1}$

La primera derivada es $C_m{}'(x) = 1 + (-1)\ 800x^{-2} = 1 - 800x^{-2}$

La segunda derivada es $C_m{}'(x) = -(-2)\ 800x^{-3} = 1\,600x^{-3}$

$$C_m''(x) = \frac{1\,600}{x^3}$$

Se garantiza la existencia de un mínimo dado que x siempre es positivo. El número de sillas necesarias para minimizar el costo promedio es de 28.

b) Con un número de sillas producidas de 28, se calcula el costo promedio y el costo total.

El costo mínimo promedio es $C_m(28) = 28 + 40 + \frac{800}{28} = 68 + 28.57$

$$C_m(28) = 96.57$$

El costo mínimo promedio por silla producida es de \$96.57.

El costo total es $C(28) = (28)^2 + 40(28) + 800$

$$C(28) = 2\,704$$

El costo total al producir 28 sillas es de \$2 704.

Ejercicios propuestos

1. Con las funciones de costo y demanda:

$$C(x) = 680 + 4x + 0.01x^2; \quad p(x) = 12$$

a) Determina el número de artículos que maximiza la ganancia.
b) Calcula el ingreso que garantiza la maximización de la ganancia.

2. Empleando las funciones de costo y demanda:

$$C(x) = x^3 - 2x^2 + 200x + 1000 \quad p(x) = 1400 - 2x$$

a) Determina el número de artículos que maximiza la ganancia.
b) Calcula el precio que garantiza la maximización de la ganancia.

3. Con la función de costos $C(x) = 10\,500 + 30x + 10x^2$

a) Determina la cantidad de producto que minimiza el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

4. Empleando la función de costos $C(x) = 20\,500 + 300x + 25x^2$

a) Determina la cantidad de artículos producidos que minimiza el costo promedio.
b) Calcula el costo promedio mínimo y el costo total.

Autoevaluación

1. Con las funciones de costo y demanda:

$C(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad p(x) = 29$

El número de artículos que maximiza la ganancia es:

a) 8
b) 18
c) 6
d) 4

2. Empleando las funciones de costo y demanda:

$C(x) = 800 - 80x + 0.0002x^2 \quad p(x) = -20 - 0.0008x$

El número de artículos que maximiza la ganancia es:

a) 60 000
b) 70 000
c) 30 000
d) 65 000

3. Con las funciones de costo y demanda:

$C(x) = x^2 - 5x + 8 \quad p(x) = 125$

El número de artículos que maximiza la ganancia es:

a) 60
b) 65
c) 50
d) 70

4. Con la función de costos $C(x) = 0.02x^2 + 28x + 200$ la cantidad de producto que minimiza el costo promedio es:

a) 100
b) 200
c) 150
d) 300

5. Empleando la función de costos $C(x) = 0.1x^2 + 10x + 1\,000$ la cantidad de artículos producidos que minimiza el costo promedio es:

a) 270
b) 75
c) 150
d) 100

6. Con la función de costos $C(x) = 500 + 20x + 5x^2$ la cantidad de producto que minimiza el costo promedio es:

a) 11
b) 10
c) 12
d) 15

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. a) El precio que maximiza los ingresos totales es 17.5.
b) El ingreso máximo es de 7 656.25.

2. a) El precio que debe cobrarse para maximizar los ingresos es de 1 000.
b) Se espera que la demanda sea de 25 000 unidades.

3. a) El nivel de producción que maximiza la utilidad es de 667.
b) El precio que maximiza la utilidad es de 10.66.
c) El costo total es de 2 460.89, el ingreso total es de 7 114.22 y la utilidad de 4 653.33.

4. a) La cantidad de huéspedes que debe haber para maximizar la ganancia es de 600.
b) Se debe cobrar un precio de 54.
c) El ingreso total es de 32 400, el costo total es 26 650 y la utilidad 5 750.

5. a) El nivel de producción debe ser de 250.
b) La utilidad máxima es 249 000.

6. a) El número de puestos que debe haber es 10.
b) El valor máximo de ventas es 2 000.

Ejercicio 2

1. a) La cantidad de unidades que minimizan el costo es de 159.
b) Se tiene un costo promedio de 1.06 y un costo total de 169.64.

2. a) Se tienen 400 unidades que minimizan el costo.
b) Hay un costo promedio de 0.15 y un costo total de 60.

3. a) Deben producirse 7 071 unidades.
b) El costo promedio es de 142.4 y el costo total de 1 007 097.1.

4. a) Una cantidad de 32 unidades minimiza el costo.
b) Existe un costo promedio mínimo de 62.65 y un costo total de 2 004.8.

5. a) Se deben vender 46 artículos.
b) El costo promedio mínimo es 74.64 y el costo total 3 433.36.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. a) El número de artículos que maximiza la ganancia es de 400.
b) El ingreso que maximiza la ganancia 4 800.

2. a) El número de artículos que maximiza la ganancia es 20.
b) El precio maximizador de la ganancia es 1 360.00

3. a) La cantidad de producto que minimiza el costo es 32.
b) El costo promedio mínimo es 678.12 y el costo total 21 700.

4. a) La cantidad de artículos producidos necesarios para minimizar el costo es 29.
b) Se tiene un costo promedio mínimo de 1 731.89 y un costo total de 50 225.

Respuestas a la autoevaluación

1. a)
2. c)
3. b)
4. a)
5. d)
6. b)