Departamento de Matemática
Esc. de Formación Básica
Cálculo III
Coordinadora: Dirce Braccialarghe

Guía 2: Polinomios de Taylor para funciones de dos variables

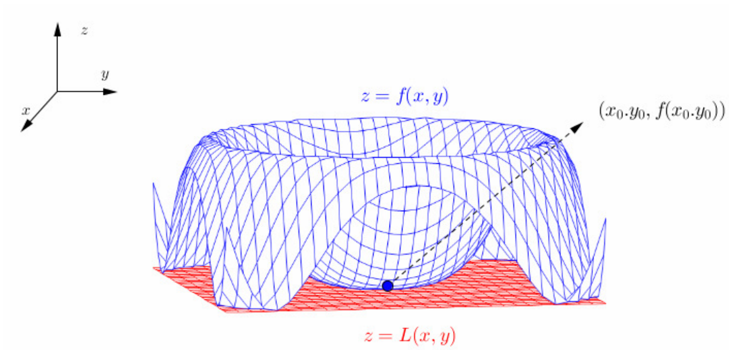
Los polinomios de Taylor son una herramienta central para encontrar aproximaciones numéricas de funciones y es por ello que desempeñan un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada y computacional.

Cuando se introdujo el cálculo diferencial para funciones de dos variables se vio que la **aproximación lineal** desempeña un papel esencial, tanto por una razón geométrica (encontrar la ecuación del plano tangente) como por una razón analítica (encontrar valores aproximados de las funciones).

Si *f* es diferenciable en (x_0, y_0) sabemos que la función lineal *L* de ley

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es una “buena” aproximación de $f(x,y)$ cuando (x,y) está “cerca” de (x_0,y_0).



La función *L* recibe también el nombre de polinomio de Taylor de 1° grado generado por *f* en el punto (x_0,y_0).

Siguiendo la misma idea que fue utilizada para funciones de una variable, queremos ahora obtener una fórmula que nos permita, en los alrededores del punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, aproximar a la función *f* a partir de una función polinomial de 2° grado. Es decir, queremos hallar un polinomio $Q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + g$ de manera que éste sea una “buena” aproximación de $f(x,y)$ cuando (x,y) está “cerca” de (x_0,y_0). Naturalmente, es de esperar que los coeficientes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *g* de este polinomio estén relacionados con las derivadas parciales de la función *f* en el punto (x_0,y_0), como ocurre en el caso de una función de una variable.

Consideremos la función $f : U \subset R^2 \to R$ definida en el abierto *U*. Supongamos que $(x_0,y_0) \in U$ y que f tiene derivadas parciales segundas continuas en *U*. Entonces, el polinomio

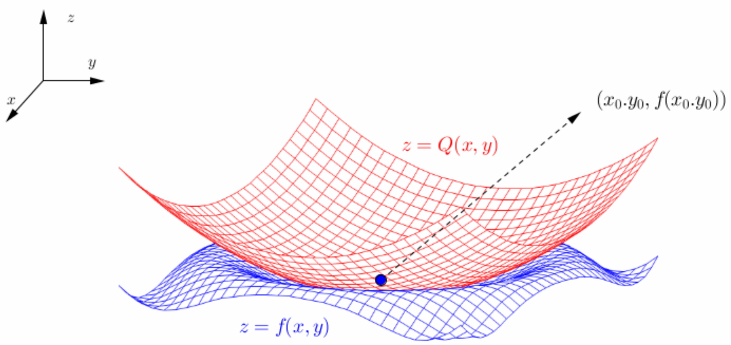
$$Q(x,y) = L(x,y) + \frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right)$$

es una buena **aproximación cuadrática** de *f* en los alrededores de (x_0, y_0). Este polinomio recibe el nombre de polinomio de Taylor de 2° grado generado por *f* en el punto (x_0, y_0).

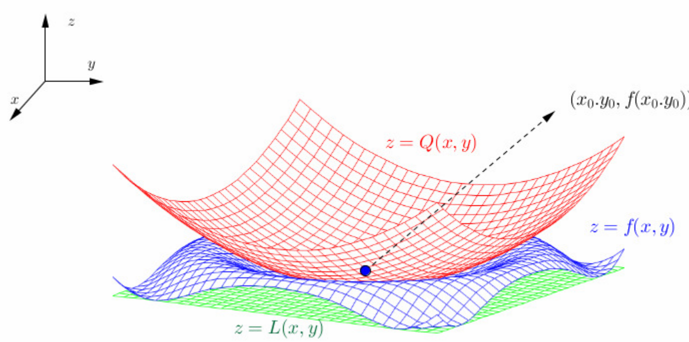
Observación: Quien esté familiarizado con la notación matricial puede expresar *Q* de de la siguiente manera:

$$Q(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f\ (x_0,y_0) \times (x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

La matriz que aparece en esta última expresión se llama **matriz Hessiana** y se la nota $H(x_0, y_0)$. Su estudio nos permite caracterizar los extremos locales de la función *f*.



La siguiente figura muestra los gráficos de *f*, *L* y *Q* en un mismo sistema.



Actividad 1:

Verifica que *Q* tiene las mismas derivadas parciales de primer y segundo orden que *f* en el punto (x_0, y_0).

Actividad 2:

a) Encuentra los polinomios de Taylor *L* y *Q*, de primer y segundo grado respectivamente, generados por $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ en el punto $(0,0)$.

b) Grafica *f*, *L* y *Q* en un mismo sistema.

La fórmula del error para aproximaciones lineales

Como en funciones de una variable, en el caso de funciones de dos variables también la función error tiene su expresión. Para el caso de la aproximación lineal se tiene que

$$E(x,y)=\frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2 f_{xx}(c_1,c_2)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(c_1,c_2)+(y-y_0)^2 f_{yy}(c_1,c_2)\right)$$

donde (c_1,c_2) es algún punto en *U* en el segmento que une (x_0,y_0) con (x,y).

<u>Actividad 3</u>:

Demuestra que si $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$ están acotadas en *U* entonces el error $E(x,y)$ entre los valores de la función *f* y su linealización *L* en un punto $(x,y)\in U$ satisface la desigualdad

$$|E(x,y)|\le\frac{1}{2}M\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2$$

donde *M* es una cota superior para $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$ en *U*.

Fórmula de Taylor para funciones de varias variables

En, por ejemplo [2], pgs 189 a 193, pueden encontrar la extensión de estos resultados a funciones de varias variables y la demostración del teorema de Taylor para funciones de dos variables.

La fórmula general para funciones de dos variables queda expresada así (¡no asustarse!):

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+((x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0))+$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(x_0,y_0)+(y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(x_0,y_0)}+\frac{1}{(n+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(x_0+c(x-x_0),y_0+c(y-y_0))}$$

(*)

donde el último término corresponde a la expresión de la función error *E* y los términos anteriores corresponden al polinomio de Taylor de grado $\le n$ generado por *f* en el punto (x_0,y_0).

Ejemplo[1]

Determinar una aproximación cuadrática para la función $f(x,y)=senx\,seny$ alrededor del origen. ¿Cuán precisa es la aproximación si $|x|\le 0{,}1$ y $|y|\le 0{,}1$?

Solución: En la ecuación (*) consideramos $n=2$:

[1] Ejemplo 1, pg. 1058, del libro Cálculo, varias variables de G. Thomas, 11ma. Edición.

$$f(x,y) = f(0,0) + (xf_x(0,0) + yf_y(0,0)) + \frac{1}{2!}\left(x^2 f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(x^3 f_{xxx}(cx,cy) + 3x^2 y f_{xxy}(cx,cy) + 3xy^2 f_{xyy}(cx,cy) + y^3 f_{yyy}(cx,cy)\right)$$

Calculando tenemos que $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$; $f_{xy}(0,0) = 1$.

Entonces resulta que

$$senx\ seny \approx xy$$

El error en la aproximación es:

$E(x,y) = \frac{1}{3!}\left(x^3 f_{xxx}(cx,cy) + 3x^2 y f_{xxy}(cx,cy) + 3xy^2 f_{xyy}(cx,cy) + y^3 f_{yyy}(cx,cy)\right)$. Las terceras derivadas están acotadas por 1 ya que son productos de senos y cosenos. Además $|x| \le 0{,}1$ y $|y| \le 0{,}1$. Por lo tanto:

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{3!}\left(0{,}1^3 + 3 0{,}1^2 0{,}1 + 3\ 0{,}1 0{,}1^2 + 0{,}1^3\right) = \frac{8}{6} 0{,}1^3 \le 0{,}00134$$

Por lo tanto si $|x| \le 0{,}1$ y $|y| \le 0{,}1$ cuando tomemos la aproximación cuadrática en lugar de la función *f* para estimar el valor $f(x,y)$, el error no excederá a $0{,}00134$.

Actividad 4

1) Utilizar la fórmula de Taylor para *f* en el origen para encontrar aproximaciones lineales y cuadráticas de *f* cerca del origen. Representá gráficamente la función *f* y sus aproximaciones.

i) $f(x,y) = x e^y$

ii) $f(x,y) = e^x \cos y$

iii) $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

iv) $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$

2) Obtener la siguiente fórmula aproximada para calcular x^y con (x,y) cercanos al $(1,1)$:

$$x^y \approx xy - y + 1$$

3) Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

para (x,y) cercanos al $(0,0)$.

Bibliografía

[1] G.Thomas. *Cálculo, varias variables*, 11ma. Edición, Ed. Pearson Educación.

[2] J. Marsden, A. Tromba. *Cálculo vectorial*, 5ta. Edición, Ed. Pearson Educación.

[3] J. Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, 6ta. Edición, Ed. Cengage Learning.

[4] C. Pita Ruiz. *Cálculo Vectorial*, 1ra. Edición, Ed. Pearson Educación.