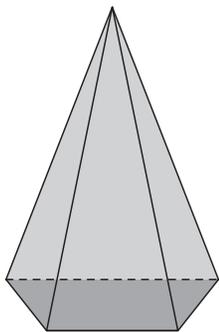




PIRÁMIDE

Una **pirámide** es un **poliedro** cuya superficie está formada por una **base** que es un polígono cualquiera y **caras laterales triangulares** que confluyen en un vértice que se denomina **ápice** (o vértice de la pirámide).

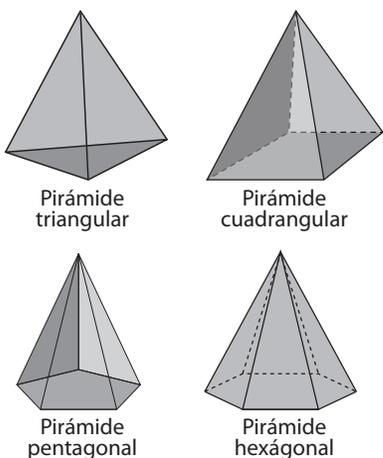
Las pirámides tienen tantos triángulos en las caras laterales como lados tiene la base.



Tipos de pirámides

Las pirámides se pueden clasificar de acuerdo a cuatro criterios:

1. Las pirámides se denominan en función del polígono que tengan como base.



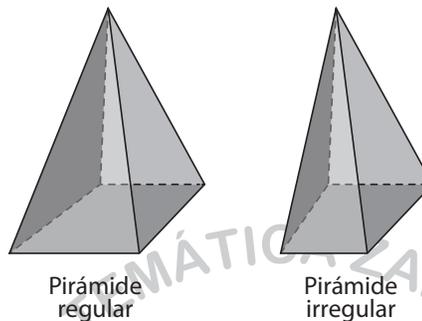
De esta manera tenemos:

- ▼ **Pirámide triangular:** su base es un triángulo (3 lados), al igual que sus caras laterales.

- ▼ **Pirámide cuadrangular:** su base es un cuadrado (4 lados), al igual que sus caras laterales.
- ▼ **Pirámide pentagonal:** su base es un pentágono (5 lados), al igual que sus caras laterales.
- ▼ **Pirámide hexagonal:** su base es un hexágono (6 lados), al igual que sus caras laterales.
- ▼ ...

2. Las pirámides, según su base, pueden ser regulares o irregulares.

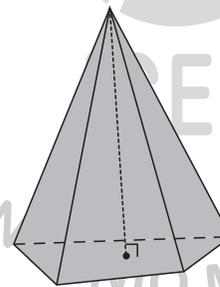
- ▼ **Pirámide regular:** la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles.
- ▼ **Pirámide irregular:** cuando tiene por base un polígono irregular.



3. Pirámide recta u oblicua

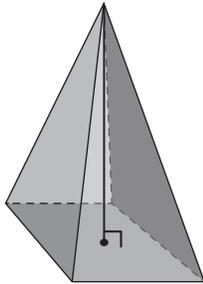
- ▼ **Pirámide recta:** cuando su altura o eje cae en el punto medio de su base, además las caras laterales son triángulos isósceles.

El eje es perpendicular al polígono base.



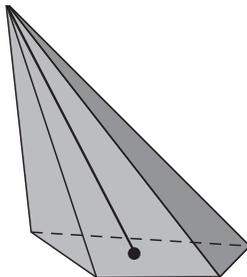


- ▼ **Pirámide regular recta:** La base es un polígono regular y el eje es perpendicular a un polígono base.

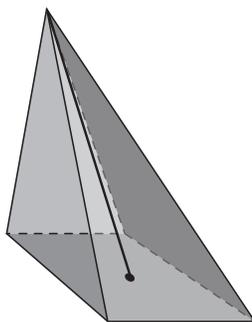


- ▼ **Pirámide oblicua:** cuando su altura o eje no cae en el punto medio de su base, además alguna de las caras laterales no es un triángulo isósceles.

El eje no es perpendicular a un polígono base.

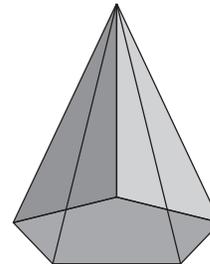


- ▼ **Pirámide regular oblicua:** La base es un polígono regular y el eje no es perpendicular al polígono base.



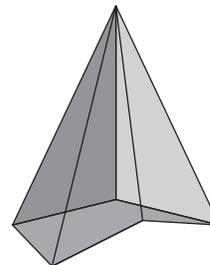
4. Pirámide convexa o cóncava

- ▼ **Pirámide convexa:** cuando la base es un polígono convexo.



Pirámide convexa

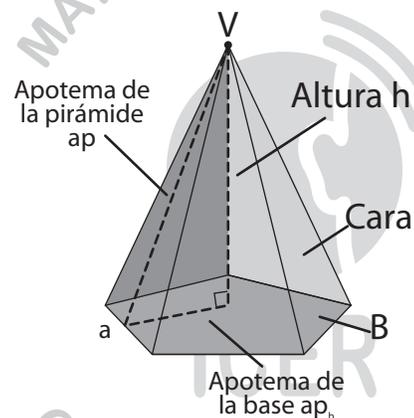
- ▼ **Pirámide cóncava:** cuando la base es un polígono cóncavo.



Pirámide cóncava

Elementos de la pirámide

En una **pirámide** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:



- ▼ **Base (B):** polígono cualquiera. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.



- ▼ **Caras (C)**: los triángulos de los laterales y la base.
- ▼ **Aristas (a)**: segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir: aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base.
- ▼ **Altura (h)**: distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.
- ▼ **Vértice de la pirámide (V)**: punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama **ápice**.
- ▼ **Apotema de la pirámide (ap)**: distancia del vértice a un lado de la base.

Solo existe en las pirámides regulares.

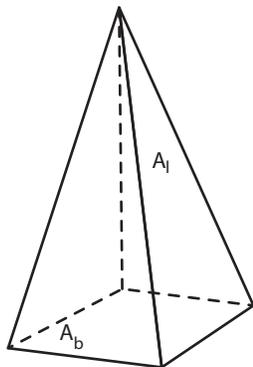
Puesto que en este caso las caras laterales son isósceles, **la apotema de la pirámide** es también **la altura de las caras laterales**.

Apotema de la base (ap_b): distancia de un lado de la base al centro de ésta.

Solo existe en las pirámides regulares.

Área de la pirámide

El **área total de la pirámide** se calcula mediante la suma del área de la base (A_b) y el área de los triángulos de las caras laterales (A_l).



$$\text{Área} = A_b + A_l$$

siendo A_b el área de la base y A_l el área de las caras laterales

El **área de la base (A_b)** se calcula según el polígono que sea la base.

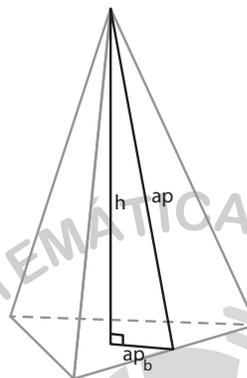
El **área de las caras laterales (A_l)** es la suma del área de los triángulos de las caras laterales. La pirámide tiene tantos triángulos como aristas tiene la base.

Área lateral y total de algunas pirámides

A. UNA PIRÁMIDE TRIANGULAR

Una **pirámide triangular** es un **poliedro** cuya superficie está formada por una base que es un triángulo y tres **caras laterales que son triángulos** isósceles y congruentes que confluyen en un vértice que se denomina **ápice** (o vértice de la pirámide).

En las pirámides triangulares regulares, la altura (h), la apotema de la base (ap_b) y la apotema de la pirámide (ap) forman un triángulo rectángulo.



Por el **teorema de Pitágoras**, conociendo la altura (h) y la apotema de la base (ap_b) podemos calcular la **apotema** de la pirámide (ap):

$$ap = \sqrt{h^2 + ap_b^2}$$

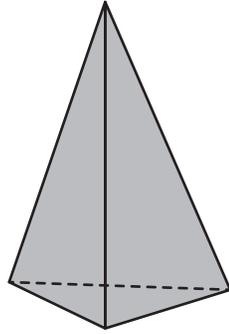
siendo **h** la altura, **ap_b** la apotema de la base y **ap** la apotema de la pirámide



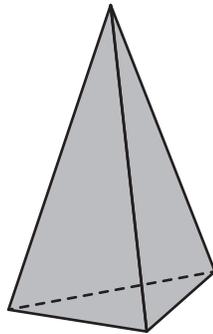
Tipos de pirámide triangular

Existen **dos tipos** de pirámide triangular:

- ▼ **Pirámide triangular regular:** la base es un triángulo equilátero y es recta (la recta perpendicular a la base que pasa por el vértice de la pirámide corta a la base por su centro). Las caras laterales son triángulos isósceles y congruentes.



- ▼ **Pirámide triangular irregular:** es aquella cuya base es un triángulo no equilátero (isósceles, escaleno o bien rectángulo).



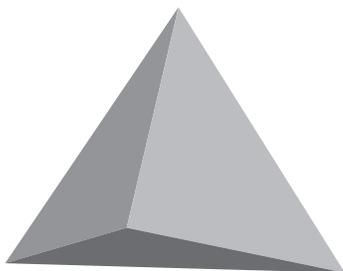
Área de la pirámide triangular

La fórmula del área de la pirámide triangular cambia según si la pirámide es regular o irregular.

Área de la pirámide triangular regular

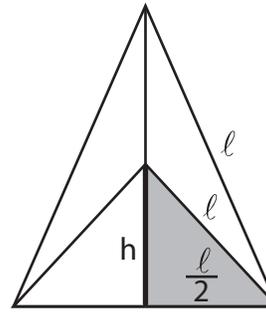
■ Caso 1

Cuando la totalidad de las caras de la pirámide son **triángulos equiláteros** (es decir, triángulos que tienen los tres lados iguales), se le denomina tetraedro **regular**.



Para calcular el área total de un tetraedro regular debemos conocer previamente los siguientes datos:

- ▼ La altura h del triángulo equilátero $h = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$.



$$h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

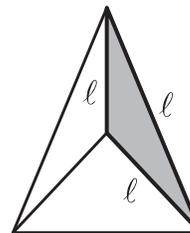
$$h^2 = \frac{4\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

área

- ▼ El área de una de las caras de la pirámide (un triángulo equilátero), se obtiene mediante la fórmula: $A = \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$.

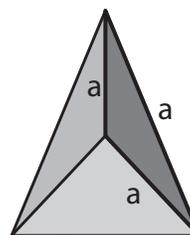


$$A = \frac{\ell \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \sqrt{3}$$

$$A = \frac{\ell^2}{4} \sqrt{3}$$

- ▼ El área total A_T del tetraedro regular se obtiene multiplicando por cuatro la medida de la superficie de una de las caras de la pirámide $A_T = \ell^2\sqrt{3}$.



$$A_T = 4A_c$$

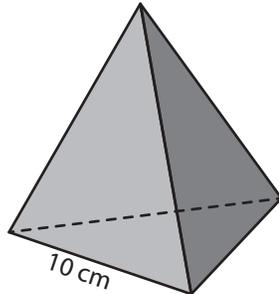
$$A_T = 4 \cdot \frac{\ell^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A_T = \ell^2 \sqrt{3}$$



Ejemplos:

- 1) El siguiente poliedro corresponde a un tetraedro regular.



- ¿Cuánto mide la altura de una cara lateral (apotema de la pirámide)?
- ¿Cuál es el área lateral A_ℓ de una de sus caras?
- ¿Cuánto es el área total A_T del tetraedro regular.

Solución:

- a) hallamos la altura h de una cara (apotema de la pirámide).

$$h = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

$$h = \frac{10 \text{ cm}}{2}\sqrt{3}$$

$$h = 5\sqrt{3} \text{ cm} = 8,66 \text{ cm}$$

- b) hallamos el área de una cara lateral mediante la fórmula para obtener el área de un triángulo equilátero, $A = \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$.

$$A = \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$$

$$A = \frac{(10 \text{ cm})^2}{4}\sqrt{3}$$

$$A = \frac{100 \text{ cm}^2}{4}\sqrt{3}$$

$$A = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 43,30 \text{ cm}^2$$

- c) El área total A_T del tetraedro regular es la suma de las áreas de 4 triángulos (base + 3 laterales):

$$A_T = 25\sqrt{3} + 25\sqrt{3} + 25\sqrt{3} + 25\sqrt{3}$$

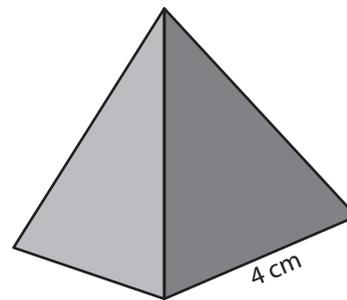
$$A_T = 4 \cdot 25\sqrt{3}$$

$$A_T = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 173,20 \text{ cm}^2$$

También, podemos resolver: $A_T = \ell^2\sqrt{3}$ para $\ell = 10 \text{ cm}$.

$$\begin{aligned} A_T &= \ell^2\sqrt{3} = (10 \text{ cm})^2\sqrt{3} = 100 \text{ cm}^2\sqrt{3} \\ &= 100\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 173,20 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- 2) Calcule el área total de un tetraedro regular de 4 cm de arista.



Solución:

$$A_T = \ell^2\sqrt{3}$$

$$A_T = (4 \text{ cm})^2\sqrt{3}$$

$$A_T = 16 \text{ cm}^2\sqrt{3}$$

$$A_T = 27,72 \text{ cm}^2$$

■ Caso 2

La base es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles e iguales entre sí.

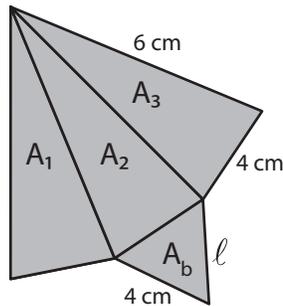
Ejemplos:

- Determine el área total de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 6 cm, y con base un triángulo equilátero de 4 cm de lado.



Solución:

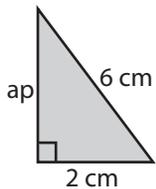
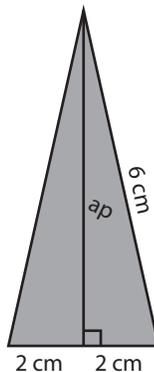
Datos:



Cálculo de un área lateral de la pirámide de base triangular equilátero.

▼ **Primero**, debemos hallar la apotema de la pirámide a_p que corresponde a la altura de una de las caras de la pirámide

Por el teorema de Pitágoras calculamos la apotema de la pirámide a_p



$$(6 \text{ cm})^2 = (a_p)^2 + (2 \text{ cm})^2$$

$$36 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2 = (a_p)^2$$

$$\sqrt{32 \text{ cm}^2} = a_p$$

$$5,66 \text{ cm} = a_p$$

▼ **Segundo**, el área de las caras laterales.

$$A = \frac{(\text{base} \times \text{altura})}{2} = \frac{4 \text{ cm} \times 5,66 \text{ cm}}{2}$$
$$= \frac{22,64}{2} = 11,32 \text{ cm}^2$$

Son tres las caras laterales.

$$A_\ell = 3 \text{ caras} \times 11,32 \text{ cm}^2$$

$$A_\ell = 3 \text{ caras} \times 11,32 \text{ cm}^2$$

$$A_\ell = 33,96 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área basal (B) de la pirámide de base triangular equilátero.

El área de un triángulo equilátero se obtiene mediante $A = \frac{\ell^2}{4} \sqrt{3}$.

$$A = \frac{\ell^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A = \frac{(4 \text{ cm})^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A = \frac{16 \text{ cm}^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A = 4 \text{ cm}^2 \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 6,93 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área total: A_T de la pirámide de base triangular equilátero.

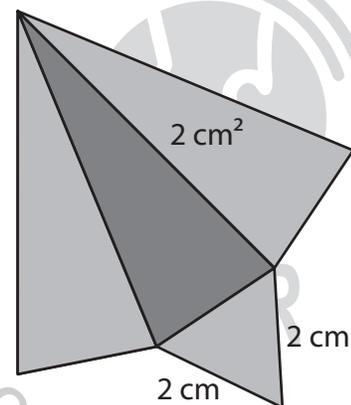
$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = 33,96 \text{ cm}^2 + 6,93 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 40,88 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área total de la pirámide es de $40,88 \text{ cm}^2$.

2. En una pirámide triangular, su arista básica mide 2 cm y el área de la región de una de sus caras laterales es 2 cm^2 . Hallar el área de la superficie total (A_T) de la pirámide.





Solución:

$$A_T = A_l + B$$

$$A_T = (2\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2) + \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 6\text{ cm}^2 + \frac{(2\text{ cm})^2 \sqrt{3}}{4}$$

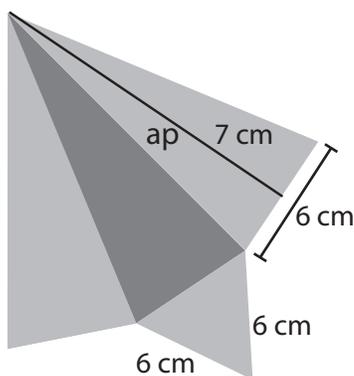
$$A_T = 6\text{ cm}^2 + \frac{4\text{ cm}^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 6\text{ cm}^2 + \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

$$A_T = (6 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$$

Respuesta: El área de la superficie total de la pirámide es $(6 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$.

3. En una pirámide triangular regular su arista básica mide 6 cm, la apotema de la pirámide mide 7 cm. Hallar el área de la superficie total (A_T) de la pirámide.



Solución:

Desconocemos el área lateral A_l de la pirámide

$$A_l = \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) = \left(\frac{6\text{ cm} \times 7\text{ cm}}{2} \right)$$

$$= \frac{42\text{ cm}^2}{2} = 21\text{ cm}^2$$

Falta obtener el área del triángulo equilátero que corresponde a la base B.

Recordando que el área de un triángulo equilátero se obtiene con $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$.

$$A_T = (21\text{ cm}^2 + 21\text{ cm}^2 + 21\text{ cm}^2) + \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$$

$$A_T = (21\text{ cm}^2 + 21\text{ cm}^2 + 21\text{ cm}^2) + \frac{\sqrt{3}}{4} (6\text{ cm})^2$$

$$A_T = 63\text{ cm}^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36\text{ cm}^2$$

$$A_T = 63\text{ cm}^2 + 9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

$$A_T = (63 + 9\sqrt{3})\text{ cm}^2$$

TRABAJO INDIVIDUAL 2



1. En una pirámide regular triangular, el lado de base es 8 m, la apotema de la pirámide es 5 m y cuya altura es 4,43 cm. Calcular la apotema de la base de la pirámide y la superficie total.

Respuesta: _____

2. Calcular la arista lateral de una pirámide triangular; sabiendo que su lado de base es de 12 m, la apotema de la pirámide es 10,58 m y su altura es 10 m. También averiguar la superficie total.

Respuesta: _____

3. Obtenga el área de una cara y el área total de un tetraedro regular cuya arista mide 2 cm.

Respuesta: _____

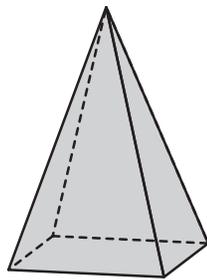


4. Hallar el área total de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 8 cm y con base, un triángulo equilátero de 7 cm de lado.

Respuesta:

B. PIRÁMIDE CUADRANGULAR

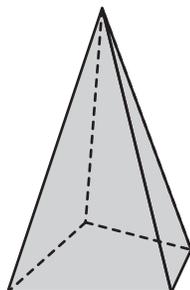
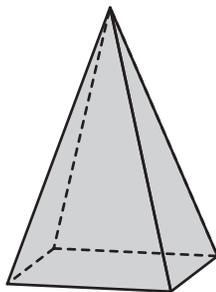
Una **pirámide cuadrangular** es un poliedro cuya superficie está formada por una base que es un cuadrilátero y **caras laterales triangulares** que confluyen en un vértice que se denomina **ápice** (o vértice de la pirámide). Está compuesta por 5 caras, la base cuadrangular y cuatro triángulos laterales que confluyen en el vértice.



Tipos de pirámide cuadrangular

Existen dos tipos de **pirámide cuadrangular**:

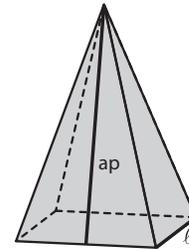
- ▼ **Pirámide cuadrangular regular:** la base es un cuadrado y es recta (la recta perpendicular a la base que pasa por el vértice de la pirámide corta a la base por su centro). Las caras laterales son triángulos isósceles y congruentes entre sí.
- ▼ **Pirámide cuadrangular irregular:** es aquella cuya base es un cuadrilátero (sin ser un cuadrado).



Área de la pirámide cuadrangular

La formula de la pirámide cuadrangular cambia según si la pirámide es regular o irregular. La fórmula de su área es: $\text{Área} = A_b + A_\ell$ siendo A_b el área de la base y A_ℓ el área de las caras laterales.

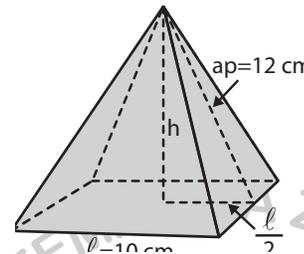
Si la pirámide cuadrangular es regular se tiene que: $A_T = A_b + A_\ell = \ell \cdot (2 \cdot ap + \ell)$ donde ℓ es una arista de la base y ap la apotema de la pirámide.



Ejemplos

1. La apotema de una **pirámide cuadrangular** regular mide 12 cm y su arista básica 10 cm. ¿Cuánto mide la altura de la pirámide?

Datos:



Solución:

Por el teorema de Pitágoras hallamos la medida de la altura mediante la expresión siguiente:

$$(ap)^2 = (h)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$(12 \text{ cm})^2 = h^2 + \left(\frac{10 \text{ cm}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = (12 \text{ cm})^2 - \left(\frac{10 \text{ cm}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 144 \text{ cm}^2 - 25 \text{ cm}^2$$

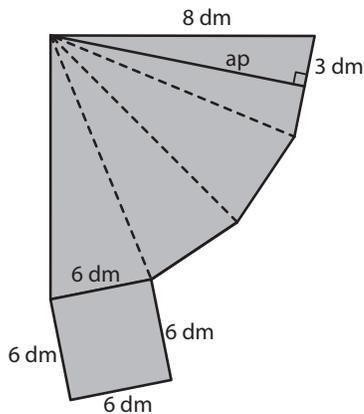
$$h^2 = 119 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{119 \text{ cm}^2} = 10,90 \text{ cm}$$

Respuesta: La altura de la pirámide mide 10,90 cm.



2. Hallar la apotema de la pirámide regular cuadrangular, cuya arista lateral mide 8 dm y el perímetro de la base 24 dm. ¿Cuánto mide el área de la superficie de la pirámide?

Datos:



Solución:

$$A_T = A_b + A_l = \ell \cdot (2 \cdot ap + \ell)$$

Por el teorema de Pitágoras hallamos ap

$$(8 \text{ dm})^2 = (ap)^2 + (3 \text{ dm})^2$$

$$(8 \text{ dm})^2 - (3 \text{ dm})^2 = (ap)^2$$

$$64 \text{ dm}^2 - 9 \text{ dm}^2 = ap^2$$

$$55 \text{ dm}^2 = ap^2$$

$$\sqrt{55 \text{ dm}^2} = ap$$

$$7,41 \text{ dm} = ap$$

Para hallar el área de la superficie de la pirámide.

$$A_T = A_b + A_l = 6 \text{ dm} \cdot (2 \cdot 7,41 \text{ dm} + 6 \text{ dm})$$

$$A_T = 6 \text{ dm} \cdot (14,82 \text{ dm} + 6 \text{ dm})$$

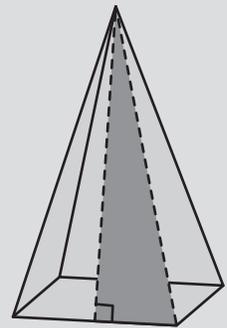
$$A_T = 6 \text{ dm} \cdot 20,82 \text{ dm}$$

$$A_T = 124,92 \text{ dm}^2$$

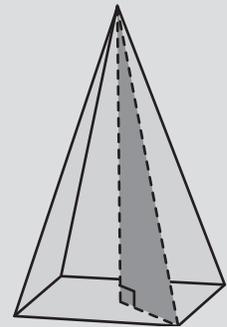
Respuesta: La apotema de la pirámide regular cuadrangular mide 7,41 dm, y el área de la superficie de la pirámide es de 124,92 dm².

Importante:

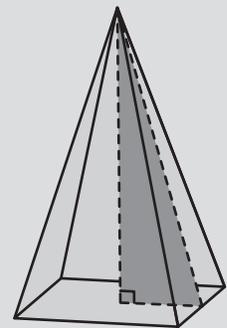
- ▼ La arista lateral de la pirámide cuadrangular de una cara y la mitad de la arista básica forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.



- ▼ La altura de la pirámide cuadrangular, la apotema de la pirámide y la mitad de la arista básica forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la altura de una cara.

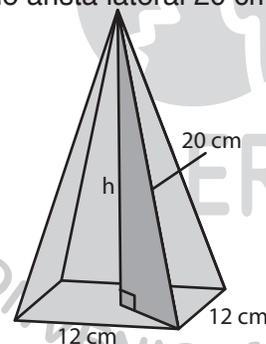


- ▼ La altura de la pirámide, la arista lateral y la mitad de la diagonal de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.



3. Calcular la altura y la superficie total de una pirámide de base cuadrangular de arista basal 12 cm y de arista lateral 20 cm.

Datos:





Cálculo de la altura h.

Debemos hallar la diagonal de la base de la pirámide, mediante el teorema de Pitágoras.

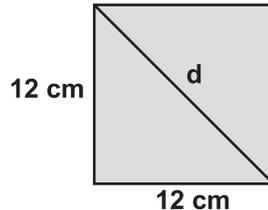
$$d^2 = (12 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2$$

$$d^2 = 144 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2$$

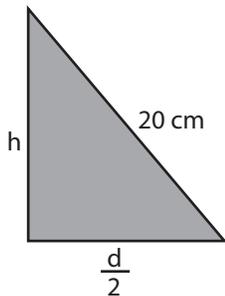
$$d^2 = 288 \text{ cm}^2$$

$$d = \sqrt{288 \text{ cm}^2}$$

$$d = 16,97 \text{ cm}$$



Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras podemos hallar la altura de la pirámide.



$$(20 \text{ cm})^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\text{donde } \frac{d}{2} = \frac{16,97 \text{ cm}}{2} = 8,49$$

$$400 \text{ cm}^2 = h^2 + 72,08 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow h^2 = 400 \text{ cm}^2 - 72,08 \text{ cm}^2$$

$$h^2 = 327,92 \text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{327,92 \text{ cm}^2}$$

$$h = 18,11 \text{ cm}$$

Cálculo de la superficie total A_T .

$$A_T = A_b + A_l$$

$$A_T = (12 \text{ cm})^2 + 4 \left(\frac{12 \text{ cm} \times 18,11 \text{ cm}}{2} \right)$$

$$A_T = 144 \text{ cm}^2 + 4 (108,66 \text{ cm}^2)$$

$$A_T = 144 \text{ cm}^2 + 434,64 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 578,64 \text{ cm}^2$$

Respuesta: La altura de la pirámide es 18,11 cm y la superficie total 578,64 cm².

TRABAJO INDIVIDUAL 3



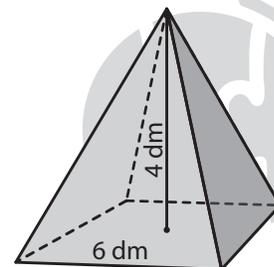
1. Anabelle y su hija quieren construir una tienda de campaña con forma de pirámide cuadrangular. ¿Qué cantidad de lona tiene que comprar si la apotema de la pirámide es de 3 m y un lado de la base mide 2,5 m?

Respuesta:

2. Calcule el área total de una pirámide cuadrangular sabiendo que el lado de la base mide 6,0 dm, la altura de la pirámide mide 5,0 dm.

Respuesta:

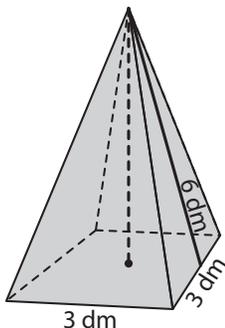
3. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Halle su área total.



Respuesta:

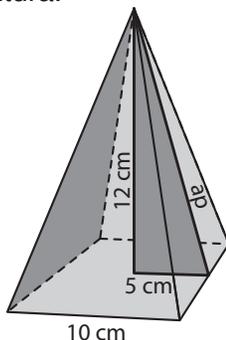


4. Halla el área total de la siguiente pirámide cuadrangular.



Respuesta:

5. Calcule el área lateral y total de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.



Respuesta:

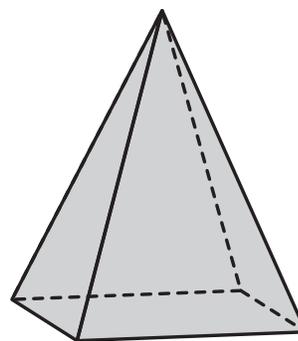
6. En una pirámide cuadrangular regular cada arista lateral mide 15 cm y la arista de la base mide 18 cm. Calcule el área total de la pirámide.

Respuesta:

C. UNA PIRÁMIDE RECTANGULAR

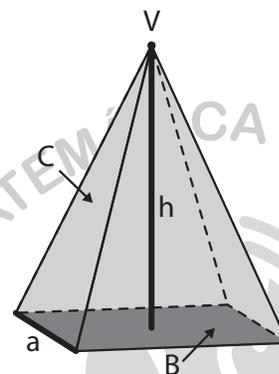
Una **pirámide rectangular** es un **poliedro** cuya superficie está formada por una base que es un rectángulo y **caras laterales triangulares** que confluyen en un vértice que se denomina **ápice** (o vértice de la pirámide).

Una pirámide rectangular está compuesta, por tanto, por 5 caras, la base rectangular y cuatro triángulos laterales que confluyen en el vértice.



Elementos de la pirámide rectangular

En una pirámide rectangular se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:



- ▼ **Base (B):** es un rectángulo. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.
- ▼ **Caras (C):** los triángulos de los laterales y la base. Los triángulos laterales son iguales dos a dos en las pirámides rectangulares rectas.
- ▼ **Aristas (a):** segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir:



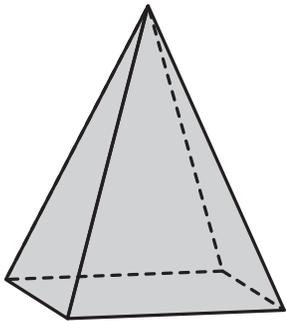
aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base. Las aristas básicas, al ser la base un rectángulo, son iguales dos a dos.

- ▼ **Altura (h):** distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.
- ▼ **Vértice de la pirámide (V):** punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama ápice.

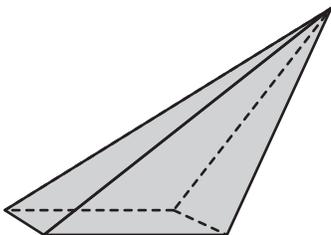
Tipos de pirámide rectangular

Existen dos tipos de pirámide rectangular:

- ▼ **Pirámide rectangular recta:** la pirámide es recta cuando todas sus caras laterales son triángulos isósceles. En este caso, la altura o recta perpendicular al plano de la base que pasa por el vértice (o ápice) de la pirámide corta a la base por el centro del rectángulo.

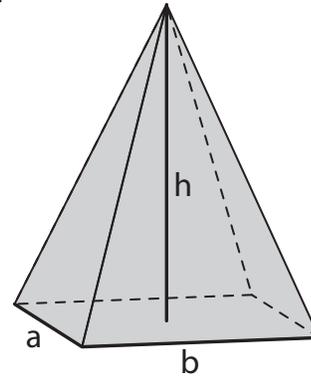


- ▼ **Pirámide rectangular oblicua:** la pirámide es oblicua cuando no todos los triángulos laterales son isósceles y la altura o recta perpendicular al plano de la base no corta por el centro del rectángulo.



Área de la pirámide rectangular recta

El cálculo del **área de la pirámide rectangular** puede calcularse sabiendo los lados diferentes de la base (a y b) y la altura de la pirámide (h). Su **fórmula** es:



$$\text{Área} = a \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}{2} \right)$$

$$\text{Área} = a \cdot b + a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

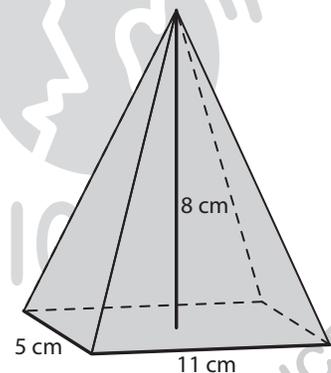
Donde a y b son las dos aristas diferentes de la base y h la altura de la pirámide.

Ejemplos:

1. Calcule el área total de una pirámide cuya base es un rectángulo de lados 5 cm y 11 cm y cuya altura de la pirámide es de 8 cm.

Solución:

Datos:



$$\text{Área total} = A_b + A_L$$



a) Cálculo del área de la base

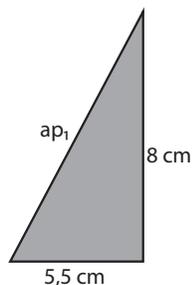
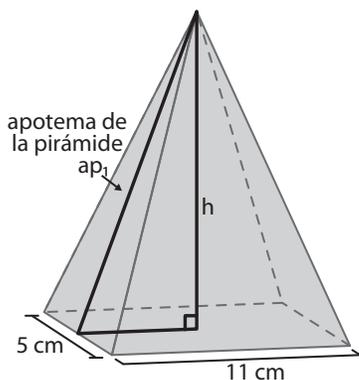
$$A_B = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$A_B = 11 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$$

$$A_B = 55 \text{ cm}^2$$

▼ Cálculo del área lateral con lado 5 cm

Con el teorema de Pitágoras la apotema de la pirámide a_{p1} de la cara lateral de arista básica 5 cm.



$$(a_{p1})^2 = (5,5 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2$$

$$(a_{p1})^2 = 30,25 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2$$

$$a_{p1} = \sqrt{94,25 \text{ cm}^2}$$

$$a_{p1} = 9,71 \text{ cm}$$

El área de las dos caras con lado 5 cm

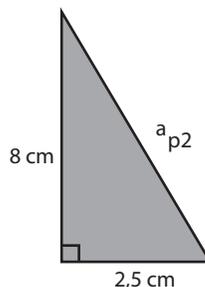
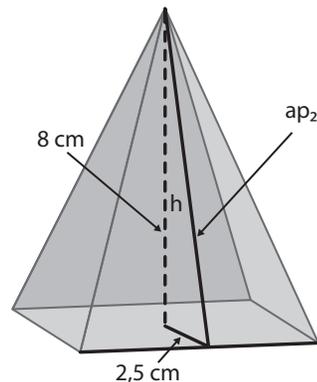
$$A = \frac{(\text{base} \times \text{altura})}{2} = \frac{5 \text{ cm} \times 9,71 \text{ cm}}{2}$$

$$= \frac{48,55}{2} = 24,275 \text{ cm}^2$$

Son dos caras: $2 \times 24,275 \text{ cm}^2 = 48,55 \text{ cm}^2$

▼ Cálculo del área lateral con lado 11 cm

Con el teorema de Pitágoras la apotema de la pirámide a_{p2} de la cara lateral de arista básica 11 cm.



$$(a_{p2})^2 = (2,5 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2$$

$$(a_{p2})^2 = 6,25 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2$$

$$a_{p2} = \sqrt{70,25 \text{ cm}^2}$$

$$a_{p2} = 8,38 \text{ cm}$$

El área de las dos caras con lado 11 cm

$$A = \frac{(\text{base} \times \text{altura})}{2} = \frac{11 \text{ cm} \times 8,38 \text{ cm}}{2}$$

$$= \frac{92,18}{2} = 46,09 \text{ cm}^2$$

Son dos caras: $2 \times 46,09 \text{ cm}^2 = 92,18 \text{ cm}^2$

b) Cálculo del área lateral de la pirámide rectangular

A_L = caras de los triángulos con lado 5 cm +
caras de los triángulos con lado 11 cm

$$A_L = 48,55 \text{ cm}^2 + 92,18 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 140,73 \text{ cm}^2$$

c) Ahora que tenemos el área lateral, podemos calcular el área total



GEOMETRÍA

Matemática - EL MAESTRO EN CASA

$$A_T = A_L + A_B$$

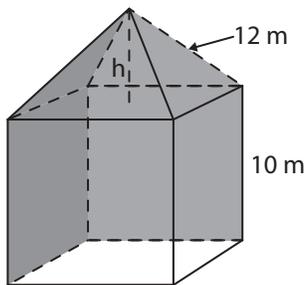
$$A_T = 140,73 \text{ cm}^2 + 55 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 195,73 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área total de la pirámide es de $195,73 \text{ cm}^2$.

2. Calcule el área lateral total de (un silo para granos) una torre cúbica de 10 m de arista, que tiene un tejado en forma piramidal cuya arista lateral es 12 m.

Solución:

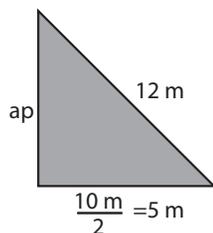
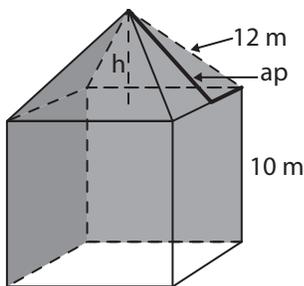


La figura consta de una parte cúbica de 10 m de arista y de un prisma cuadrangular de 10 m de arista básica y 12 m de arista lateral.

Área lateral de la **parte cúbica** es:

$$A_{\text{cubo}} = 4 \cdot (10 \text{ m})^2 = 4 \cdot 100 \text{ m}^2 = 400 \text{ m}^2$$

Para hallar el área lateral **del tejado** en forma piramidal, calculamos primero lo que mide la apotema de la pirámide ap de una de sus caras.



$ap =$ apotema de una de sus caras

$$(12 \text{ m})^2 = (ap)^2 + (5 \text{ m})^2 \Leftrightarrow (ap)^2 = (12 \text{ m})^2 - (5 \text{ m})^2$$

$$(ap)^2 = 144 \text{ m}^2 - 25 \text{ m}^2$$

$$(ap)^2 = 119 \text{ m}^2$$

$$ap = \sqrt{119 \text{ m}^2}$$

$$ap = 10,91 \text{ m}$$

Área lateral = $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ son cuatro caras de igual medida

Área del tejado en forma piramidal

$$= 4 \cdot \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) = 4 \cdot \left(\frac{10 \text{ m} \times 10,91 \text{ m}}{2} \right)$$

Área del tejado en forma piramidal

$$= 4 \cdot \frac{109,1 \text{ m}^2}{2} = 4 \cdot 54,55 \text{ m}^2 = 218,2 \text{ m}^2$$

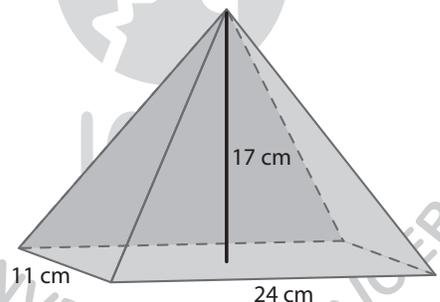
Ahora hallamos el área lateral total del silo.

Área total = Área lateral total del prisma cuadrangular + Área lateral del tejado en forma de pirámide = $400 \text{ m}^2 + 218,2 \text{ m}^2 = 618,2 \text{ m}^2$.

Respuesta. El área lateral total de silo es de $618,2 \text{ m}^2$.

3. Calcule el área total de una pirámide cuya base es un rectángulo de lados 11 cm y 24 cm y cuya altura de la pirámide es de 17 cm.

Solución:





$$\text{Área total} = a \cdot b + a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{Área total} = (11 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm}) + 11 \text{ cm} \cdot \sqrt{(17 \text{ cm})^2 + \frac{(24 \text{ cm})^2}{4}} + 24 \text{ cm} \cdot \sqrt{(17 \text{ cm})^2 + \frac{(11 \text{ cm})^2}{4}}$$

$$\text{Área total} = 264 \text{ cm}^2 + 11 \text{ cm} \cdot \sqrt{289 \text{ cm}^2 + \frac{576 \text{ cm}^2}{4}} + 24 \text{ cm} \cdot \sqrt{289 \text{ cm}^2 + \frac{121 \text{ cm}^2}{4}}$$

$$\text{Área total} = 264 \text{ cm}^2 + 11 \text{ cm} \cdot \sqrt{289 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2} + 24 \text{ cm} \cdot \sqrt{289 \text{ cm}^2 + 30,25 \text{ cm}^2}$$

$$\text{Área total} = 264 \text{ cm}^2 + 11 \text{ cm} \cdot \sqrt{433 \text{ cm}^2} + 24 \text{ cm} \cdot \sqrt{319,25 \text{ cm}^2}$$

$$\text{Área total} = 264 \text{ cm}^2 + 11 \text{ cm} \cdot 20,81 \text{ cm} + 24 \text{ cm} \cdot 17,87 \text{ cm}$$

$$\text{Área total} = 264 \text{ cm}^2 + 228,91 \text{ cm}^2 + 428,88 \text{ cm}^2$$

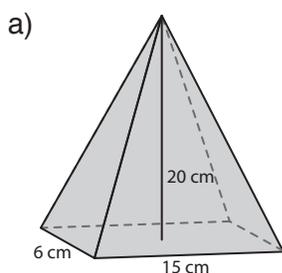
$$\text{Área total} = 921,79 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área total de la pirámide es 921,79 cm².

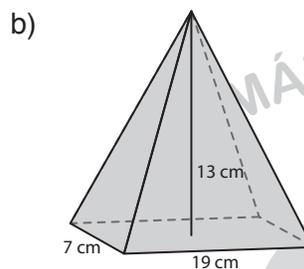
TRABAJO INDIVIDUAL 4



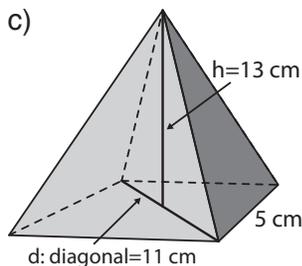
1. Calcule el área total de cada una de las siguientes pirámides rectangulares.



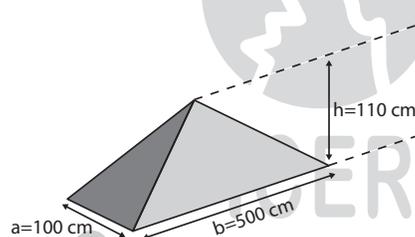
Respuesta a) _____



Reppuesta b) _____



Respuesta c) _____



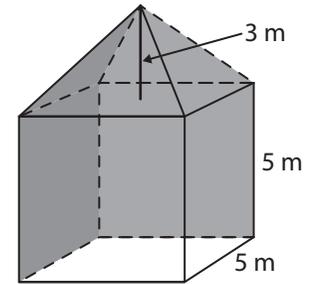
Respuesta d) _____



GEOMETRÍA

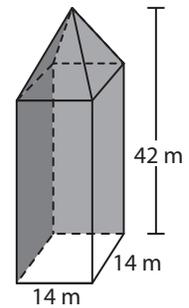
Matemática - EL MAESTRO EN CASA

2. El sólido de la siguiente figura está formado por un prisma cuadrangular y una pirámide cuadrangular. ¿Cuál es el área total del sólido?



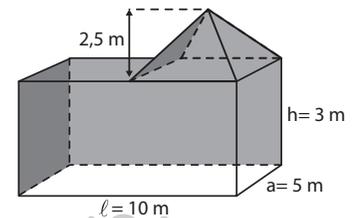
Respuesta: _____

3. El sólido de la siguiente figura está formado por un prisma rectangular y una pirámide cuadrangular. La altura de la pirámide mide un tercio de la altura del prisma: ¿Cuál es el área total del sólido?



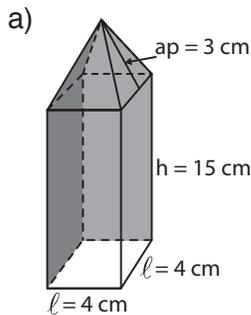
Respuesta: _____

4. Calcule la superficie total de un inmueble formado por un prisma rectangular y de una pirámide cuadrangular de 2,5 m de altura.

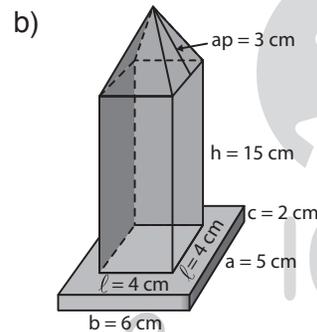


Respuesta: _____

5. Halle el área total de las siguientes figuras:



Respuesta a) _____



Respuesta b) _____

