PERÚ Ministerio de Educación

APRENDO en casa

Educación Secundaria

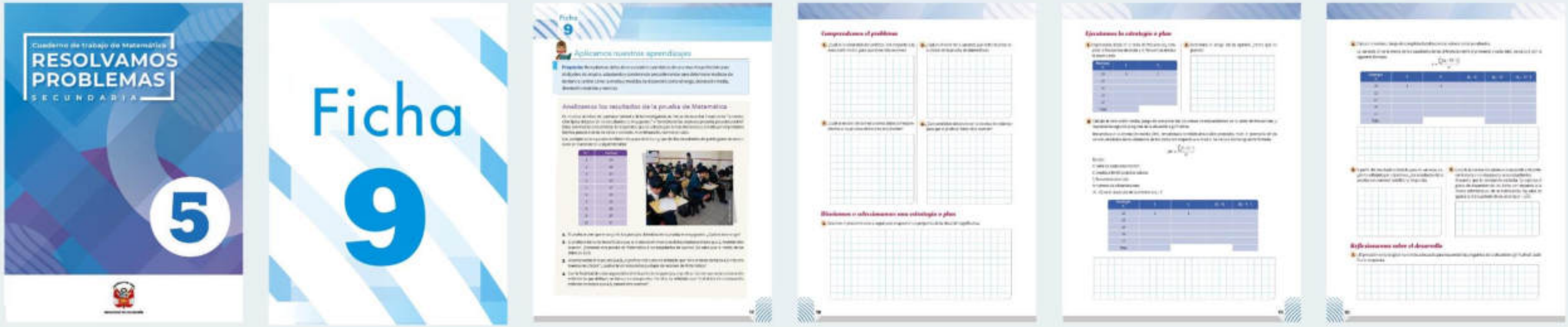
5.° grado: Matemática

SEMANA 13

Reconocemos las medidas de tendencia central y de dispersión en los resultados de una prueba

DÍA 3

Los recursos que utilizaremos serán:



Cuaderno de trabajo de Matemática:
Resolvamos problemas 5 - día 3, ficha 9, páginas 117, 118, 119 y 120.
Disponible en la sección “Recursos” de esta plataforma.

Días 3 y 4: Resolvamos

Lee y observa la siguiente situación

Ministerio de Educación

Analizamos los resultados de la prueba de Matemática

En muchos ámbitos del quehacer laboral y de la investigación, es frecuente escuchar frases como "la desviación típica del peso de los estudiantes es muy grande" o "la media de las estaturas presenta poca desviación". Estas son medidas estadísticas de dispersión, que se utilizan para tomar decisiones y constituyen importantes fuentes para el análisis de datos y variables. A continuación, veamos un caso: Los puntajes de una prueba de Matemática que rindió un grupo de diez estudiantes de quinto grado de secundaria se muestran en la siguiente tabla:

N.°	Puntaje
1	14
2	16
3	14
4	12
5	17
6	10
7	16
8	12
9	17
10	17

A partir de la situación, responde:

1. El profesor cree que el rango de los puntajes obtenidos en la prueba es muy grande. ¿Cuál es este rango?

2. El profesor del curso ha señalado que, si la desviación media de dicha prueba es mayor que 2, rendirán otro examen. ¿Tomarán otra prueba de Matemática a los estudiantes de quinto? (Se sabe que la media de los datos es 14,5).

3. Al ver la media de la prueba (14,5), el profesor del curso ha señalado que “una varianza de hasta 4,5 indicaría buenos resultados”. ¿Cuál es la varianza de los puntajes del examen de Matemática?

4. Con la finalidad de estar seguro de la distribución de los puntajes, el profesor decide que será la desviación estándar la que defina si se toma o no otra prueba. Por ello, ha señalado que “si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5, tomará otro examen”. ¿Se tomará otro examen?

Comprendemos la situación

1. ¿Cuál es la condición del profesor, con respecto a la desviación media, para que tome otro examen?

2. ¿Cuál es el valor de la media de los datos correspondientes a las pruebas de los diez estudiantes?

3. ¿Cuál es el valor de la varianza que indica buenos resultados en la prueba de Matemática?

4. ¿Qué condición debería tener la desviación estándar para que el profesor tome otro examen?

Diseñamos una estrategia o plan

1. Ordeno los procedimiento a seguir para responder las preguntas de la situación.

- Calculo el rango y la desviación media.
- Calculo la varianza y la desviación estándar.
- Elaboro una tabla de frecuencia y tabular los datos.
- Comparo los valores de las medidas de dispersión con las condiciones de las preguntas.

Algunas nociones previas

Medidas de dispersión

Situación

El profesor Emmanuel observa que 5 de sus estudiantes llegaron tarde el día de hoy, los minutos de tardanza fueron 6; 12; 7; 7 y 13, hallar la varianza y desviación estándar de los datos.

Las medidas de dispersión son números que miden el grado de separación o alejamiento de los datos con respecto a un valor central que generalmente es la media o promedio aritmético.

Resolución

- **Veamos primero qué es la varianza.**

Es una medida de dispersión relativa a la media ($\bar{x}$), es decir, cuán alejado están los datos con respecto a la media o promedio aritmético.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$\sum_{i=1}^{n}$: sumatoria desde *i* hasta *n;*

x_i: valor que asume cada dato;

n: número total de datos, la muestra

$\bar{x}$: la media o promedio aritmético

!

Recuerda:

La media ($\bar{x}$) o promedio aritmético es la suma de todos los datos entre la cantidad de los datos.

Con lo revisado, vuelvo a la resolución.

- **Para calcular la varianza lo primero que debo calcular es la media de los datos 6; 12; 7; 7 y 13.**

$$\bar{x} = \frac{6+12+7+7+13}{5} = 9$$

Recuerda:

Para datos no agrupados, la media se calcula como la suma de los datos dividido entre el número de datos.

- **Ahora sí, calculo la varianza con la fórmula.**

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

x_i: son los datos: 6; 12; 7; 7 y 13

$\bar{x} = 9$; $n = 5$

- **Reemplazo los valores:**

$$V = \frac{(6-9)^2 + (12-9)^2 + (7-9)^2 + (7-9)^2 + (13-9)^2}{5} = 8{,}4$$

Por lo tanto, la varianza es 8,4.

Cuando los valores tienden a concentrarse alrededor de su media, la varianza será pequeña; y si los valores tienden a distribuirse lejos de la media, la varianza será grande.

En este caso algunos valores de 6; 12; 7; 7 y 13 están más alejados que otros con respecto a la media que es 9. Por ejemplo, el 7 está menos alejado del 9, en cambio el 13 está más alejado del 9.

- **Calculo ahora la desviación estándar (*S*).**

$$S = \sqrt{varianza} = \sqrt{V}$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, es la medida de dispersión más común, indica qué tan dispersos están los datos con respecto a la media.

- **Para nuestra situación la varianza es 8,4 por lo tanto, la desviación estándar es la raíz cuadrada de 8,4.**

$$S = \sqrt{varianza} = \sqrt{V}$$

$$S = \sqrt{8{,}4} = 2{,}9$$

Por lo tanto, la desviación estándar es 2,9.

- **¿Qué significa que la desviación estándar es 2,9?**

Que la dispersión o el alejamiento de los datos con respecto a la media es 2,9.

Es decir, los datos no son tan homogéneos.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. **El profesor cree que el rango de los puntajes obtenidos en la prueba es muy grande. ¿Cuál es este rango?**

- **Para hallar el rango necesito ordenar primero los puntajes, lo puedo visualizar en la siguiente columna.**

Puntajes (x_i)
10
12
14
16
17

Rango. Es una medida de dispersión, se calcula hallando la diferencia entre el mayor y menor valor de los datos.

Rango = $x_{máx} - x_{mín}$

$x_{máx}$: valor máximo

$x_{mín}$: valor mínimo

- **Observo que el $x_{máx}$ = 17 y $x_{mín}$ = 10.**

Por lo tanto, el rango es igual a 17 – 10 = 7

$\boxed{R = 7}$

¡CUIDADO!

No es lo mismo x_i que $\bar{x}$

x_i: valor que asume cada dato

$\bar{x}$: media o promedio aritmético

2. Si la desviación media es mayor que 2, rendirán otro examen. ¿Tomarán otra prueba de Matemática a los estudiantes de quinto? (Se sabe que la media de los datos es 14,5).

- **Para responder a la pregunta necesito calcular la desviación media (DM), tengo como dato que la media ($\overline{x}$) es 14,5.**

Utilizo la siguiente fórmula:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| \cdot f_i}{n}$$

Recuerda:

Desviación media. Denominada también desviación promedio. Mide el promedio del producto de los valores absolutos de las diferencias de los datos y su media con la frecuencia absoluta.

Sea:

x_i: valor de cada observación

$\overline{x}$: valor de la media

f_i: frecuencia absoluta

n: número de datos

$|x_i - \overline{x}|$: valor absoluto de la diferencia de x_i y $\overline{x}$

Datos que tengo:

- La media $\overline{x}$ = 14,5.
- Los valores de cada dato x_i, la frecuencia absoluta f_i y el número de observaciones los sacamos de la tabla siguiente.

!

Recuerda:

$\bar{x}$: es la media de los datos = 14,5.

- **En la pregunta 1 se obtuvo esta tabla, ahora se hace necesario aumentar columnas para ampliar información.**

Puntajes	f_i
10	1
12	2
14	2
16	2
17	3
Total (n)	**10**

- **Añado columnas con los valores de: $\bar{x}$, $|\bar{x}_i - x|$ y $|\bar{x}_i - x| \cdot f_i$.**

Puntajes (X_i)	f_i	$\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i$
10	1	14,5	$\lvert 10 - 14,5 \rvert = 4,5$	4,5(1) = 4,5
12	2	14,5	$\lvert 12 - 14,5 \rvert = 2,5$	2,5(2) = 5,0
14	2	14,5	$\lvert 14 - 14,5 \rvert = 0,5$	0,5(2) = 1
16	2	14,5	$\lvert 16 - 14,5 \rvert = 1,5$	1,5(2) = 3
17	3	14,5	$\lvert 17 - 14,5 \rvert = 2,5$	2,5(3) = 7,5
Total (n)	**10**			**Suma = 21**

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i = 21$$

- **Reemplazo en la fórmula los datos obtenidos para hallar la desviación media.**

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$$

$$DM = \frac{21}{10} = 2{,}1$$

Respuesta: **Dado que la desviación media es 2,1 mayor que 2, se tomará otra prueba de matemática.**

3. Al ver la media de la prueba (14,5), el profesor del curso ha señalado que "una varianza de hasta 4,5 indicaría buenos resultados". ¿Cuál es la varianza de los puntajes del examen de Matemática?

- La varianza para **datos agrupados** se calcula con:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

Varianza para datos agrupados

Recuerda que para **datos no agrupados** no se utiliza la frecuencia absoluta.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Varianza para datos no agrupados

- **Para resolver la pregunta agrego una columna más para $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$.**

Puntajes (x_i)	f_i	$\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
10	1	14,5	|10 – 14,5| = 4,5	$(4,5)^2$ = 20,25 × 1 = 20,25
12	2	14,5	|12 – 14,5| = 2,5	$(2,5)^2$ = 0,25 × 2 = 12,5
14	2	14,5	|14 – 14,5| = 0,5	$(0,5)^2$ = 0,25 × 2 = 0,5
16	2	14,5	|16 – 14,5| = 1,5	$(1,5)^2$ = 2,25 × 2 = 4,5
17	3	14,5	|17 – 14,5| = 2,5	$(2,5)^2$ = 6,25 × 3 = 18,75
Total (*n*)	**10**			**Suma = 56,5**

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = 56,5$$

Teniendo todos los valores de la tabla, calculo la varianza reemplazando los valores en la fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

$$V = \frac{56,5}{10} = 5,65$$

Respuesta: **La varianza es 5,65 mayor que 4,5, por lo tanto, según los datos de la pregunta, llego a la conclusión de que no son buenos resultados.**

4. Con la finalidad de estar seguro de la distribución de los puntajes, el profesor decide que será la desviación estándar la que defina si se toma o no otra prueba. Por ello, ha señalado que "si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5, tomará otro examen". ¿Se tomará otro examen?

- **Para responder a la pregunta necesito calcular la desviación estándar, recuerdo su fórmula.**

$$S = \sqrt{varianza} = \sqrt{V}$$

La desviación estándar (S) es la raíz cuadrada de la varianza.

- **Lo bueno es que la varianza ya la calculé en la pregunta anterior.**

Varianza = 5,65

$S = \sqrt{5{,}65} = 2{,}38$

$S = 2{,}38$

- **Según el dato, si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5 se tomará otro examen.**

El doble de la desviación estándar es:

$2S = 4{,}76$

Es mayor que 4,5.

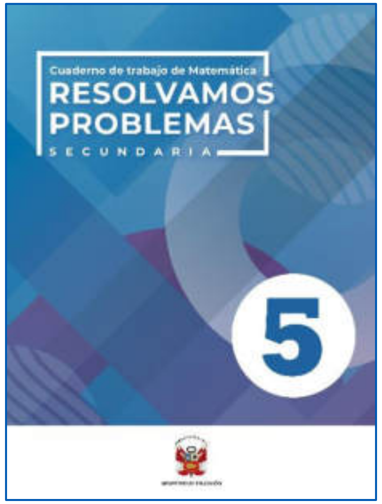
Respuesta: Por lo tanto, se tomará otro examen.

Reflexionamos sobre lo desarrollado

1. **¿El procedimiento elegido fue el más adecuado para responder las preguntas de la situación planteada? Justifica tu respuesta.**

Para seguir aprendiendo en casa

Estimado y estimada estudiante, con la finalidad de afianzar tus aprendizajes matemáticos te invitamos a revisar los desafíos de las páginas 126, 127 y 128 del cuaderno de trabajo de Matemática, Resolvamos problemas 5 - día 4 donde encontrarás otras situaciones similares que te serán útiles resolver.



Disponible en la sección “Recursos” de esta plataforma.

Días 3 y 4: Resolvamos

Gracias