Tema 3: Probabilidad

Estadística. 4º Curso.

Licenciatura en Ciencias Ambientales

Índice

Fenómenos Aleatorios

En estadística, un **fenómeno aleatorio** es aquel que bajo el mismo conjunto aparente de condiciones iniciales, puede presentar resultados diferentes, es decir, no se puede predecir el resultado exacto de cada experiencia particular. (Ej: Lanzamiento de un dado).
Este tipo de fenómeno es opuesto al fenómeno determinista, en el que conocer todos los factores de un experimento nos hace predecir exactamente el resultado del mismo. Por ejemplo, conociendo la altura desde la que se arroja un móvil es posible saber exactamente el tiempo que tardará en llegar al suelo en condiciones de vacío.

Un experimento se dice **aleatorio** si verifica las siguientes condiciones:

- Es posible conocer previamente todos los posibles resultados asociados al experimento (**el espacio muestral**, constituido por diferentes **sucesos**).
- Es imposible predecir el resultado exacto del mismo antes de realizarlo.

Nociones básicas sobre sucesos

Definición

El **espacio de resultados** o **espacio muestral**, Ω, es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Sucesos

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto de Ω. Un suceso A ocurre si el resultado del experimento aleatorio es uno de los elementos de A.

- **Suceso complementario de** A ($\bar{A}$): ocurre cuando el resultado del experimento no es un elemento de A.
- **Suceso unión de** A **y** B ($A \cup B$): ocurre cuando ó bien sucede A ó bien sucede B.
- **Suceso intersección de** A **y** B ($A \cap B$): ocurre cuando A y B suceden simultáneamente.

Cada uno de los elementos de Ω constituye un suceso. A estos sucesos se les denomina **sucesos elementales**.
El propio Ω también constituye un suceso, al que se denomina **suceso seguro**.

Nociones básicas sobre sucesos

Ejemplo 1

Se lanzan dos dados, uno rojo y otro azul. El espacio de resultados Ω estará constituido por los 36 posibles resultados del experimento, es decir:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$$

- Los sucesos elementales son $(1,1)$, $(1,2)$, etc., es decir, cada uno de los 36 elementos de Ω.
- $A = \{\text{rojo } = 4\} = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$
- $B = \{\text{rojo } + \text{ azul} = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
- $\bar{A} = \{\text{rojo } \neq 4\}$; $\bar{B} = \{\text{rojo } + \text{ azul} \neq 10\}$
- $A \cup B = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(6,4)\}$
- $A \cap B = \{(4,6)\}$

Definición clásica de probabilidad

Probabilidad

La **probabilidad** es una medida para cuantificar la seguridad que tenemos de que ocurra cada uno de los sucesos de un experimento aleatorio. A cada suceso A se le asocia un valor, $P(A)$, con $0 \leq P(A) \leq 1$.
Si $P(A) = 0$, el suceso A no va a ocurrir. Si $P(A) = 1$, el suceso A va a ocurrir con toda seguridad. Conforme mayor sea el número $P(A)$ más verosímil es el suceso A.

Definición clásica

En la definición clásica de probabilidad, todos los resultados del experimento nos resultan igualmente verosímiles, por lo que tendrán igual probabilidad.
De este modo, la probabilidad de un suceso A podrá ser calculada del siguiente modo:

$$P(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de sucesos elementales favorables a } A}{\text{N}^{\text{o}} \text{ total de sucesos elementales}}$$

es decir, mediante el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Definición clásica de probabilidad

Ejemplo 1

El espacio de muestral Ω estaba constituido por los 36 posibles resultados del experimento, es decir:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$$

Así

$$P(\text{rojo } = 4) = \frac{1}{6}\ ,\ P(\text{azul } < 3) = \frac{1}{3}\ ,\ P(\text{rojo } + \text{ azul} = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Definición frecuencial de probabilidad

En la definición frecuencial de probabilidad, se parte de que es posible repetir el experimento aleatorio un número arbitrariamente alto de veces.

Tras repetir n veces el experimento, se define la frecuencia absoluta de un suceso A

$$n(A) \equiv \textit{número de veces que ha ocurrido el suceso } A$$

y la frecuencia relativa de A tras n repeticiones del experimento será

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

De este modo, la probabilidad de un suceso A podrá ser calculada del siguiente modo:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Intuitivamente, esta definición nos dice que cuantas más veces repitamos el experimento, la frecuencia relativa nos dará una mejor aproximación al grado de confianza que podemos tener en que el suceso A ocurra.

Definición axiomática de probabilidad

Según la definición axiomática, una probabilidad consiste en asignar a cada suceso un número entre 0 y 1, siempre que cuando se consideran globalmente todas las asignaciones, se deben cumplir ciertas condiciones o axiomas.

Dicho de otro modo, una probabilidad es una aplicación que a cada suceso A de Ω le asigna un número, $P(A)$, con $0 \leq P(A) \leq 1$, verificando los siguientes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos tales que dos cualesquiera de ellos no ocurren simultáneamente, entonces

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

De estos axiomas se deducen otras propiedades como por ejemplo

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad , \qquad P(\emptyset) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

A veces, el hecho de que ocurra un suceso, B, influye en la probabilidad de los otros sucesos. A la probabilidad de un suceso A cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso B se le denomina **probabilidad de A condicionada a B** y se calcula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{probabilidad de que A y B ocurran simultáneamente}}{\text{probabilidad de que ocurra B}}$$

Independencia de sucesos

Cuando el suceso B no influye en la probabilidad que tiene el suceso A, es decir $P(A|B) = P(A)$, se dice que A y B son **independientes**.

Dicho de otro modo, A y B son independientes cuando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidad condicionada

Ejemplo 1 (continuación)

Si “rojo $=2$” y ”azul $=6$” ocurren simultáneamente entonces la tirada es $(2,6)$.

$$P((2,6)) = \frac{1}{36}$$

Por otro lado

$$P(\text{ rojo } = 2) = P(\text{ azul } = 6) = \frac{1}{6}$$

Por tanto los sucesos “rojo $=2$” y “azul $=6$” son independientes.

Principales resultados sobre probabilidad condicionada

Probabilidad total

Se utiliza para calcular la probabilidad de un suceso a partir de sus probabilidades condicionadas a una familia de sucesos, de los cuáles uno y sólo uno tiene obligatoriamente que suceder.

Sean $A_1, \ldots, A_n$ una familia de sucesos tales que dos cualesquiera de ellos nunca ocurren simultáneamente y su unión es el suceso seguro Ω, es decir, alguno de ellos tiene necesariamente que ocurrir.

Supondremos además que conocemos sus probabilidades $P(A_1), \ldots, P(A_n)$.

Si B es otro suceso del que sólo conocemos sus probabilidades condicionadas a que alguno de los sucesos anteriores ocurra, entonces la probabilidad de B se calcula del siguiente modo:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)$$

Principales resultados sobre probabilidad condicionada

Ejemplo 2

En un bosque, afectado por la lluvia ácida, el 45% de los árboles son abetos y el 55% pinos. Además se sabe que la probabilidad de que la lluvia ácida afecte a las hojas de los abetos es de 0.15 y de que afecte a las de los pinos es de 0.08. ¿Cuál es la probabilidad de que un árbol de dicho bosque tenga sus hojas afectadas por la lluvia ácida?

$$P(abeto) = 0.45 \quad , \quad P(pino) = 0.55$$

$$P(afectado|abeto) = 0.15 \quad , \quad P(afectado|pino) = 0.08$$

$$P(afectado) = 0.15 \cdot 0.45 + 0.08 \cdot 0.55 = 0.1115$$