

### Definición de logaritmo

El **logaritmo** de un número, en una **base** dada, es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener el número.

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logaritmo**.

$$\log_2 4 = 2 \quad 2^2 = 4$$

$$\log_2 1 = 0 \quad 2^0 = 1$$

Calcular por la definición de logaritmo el valor de **y**

$$1 \quad \log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad y = 2$$

$$2 \quad \log_{\sqrt{5}} 125 = y$$

$$\sqrt{5}^y = 125 \quad 5^{\frac{1}{2}y} = 5^3 \quad y = 6$$

$$3 \quad \log 0.001 = y$$

$$10^y = 0.001 \quad 10^y = 10^{-3} \quad y = -3$$

$$4 \quad \ln \frac{1}{e^5} = y$$

$$e^y = \frac{1}{e^5} \quad e^y = e^{-5} \quad y = -5$$

$$5 \quad \log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$$

### Logaritmos decimales

Los **logaritmos decimales** o vulgares son los que tienen **base 10**. Se representan por **log (x)**.

### Logaritmos neperianos o logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** o **logaritmos neperianos** son los que tienen **base e**. Se representan por **ln (x)** o **L(x)**.

Los **logaritmos neperianos** deben su nombre a su descubridor John Neper y fueron los primeros en ser utilizados.

### Propiedades de los logaritmos

De la **definición de logaritmo**:

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

podemos deducir:

**No existe el logaritmo de un número con base negativa.**

$$\nexists \log_{-a} x$$

**No existe el logaritmo de un número negativo.**

$$\nexists \log_a (-x)$$

**No existe el logaritmo de cero.**

$$\nexists \log_a 0$$

**El logaritmo de 1 es cero.**

$$\log_a 1 = 0$$

**El logaritmo en base a de a es uno.**

$$\log_a a = 1$$

$$\log 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\log_2 2 = 1$$

**El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.**

$$\log_a a^n = n$$

$$\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$$

$$\ln e^2 = 2$$

$$\log_2 \left( \frac{1}{8} \right) = \log_2 \left( \frac{1}{2^3} \right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

## Operaciones con logaritmos

### Logaritmo de una multiplicación

1 El **logaritmo** de una **multiplicación** es igual a la **suma** de los **logaritmos** de los factores.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

### Logaritmo de una división

2 El **logaritmo** de un **cociente** es igual al **logaritmo** del **dividendo** menos el **logaritmo** del **divisor**.

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left( \frac{8}{4} \right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

### Logaritmo de una potencia

3 El **logaritmo** de una *potencia* es igual al **producto** del **exponente** por el **logaritmo** de la **base**.

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

### Logaritmo de una raíz

4 El **logaritmo** de una **raíz** es igual al **cociente** entre el **logaritmo** del **radicando** y el **índice** de la raíz.

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5 Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

### Ejercicios de logaritmos

Calcula el valor de  $x$  aplicando la **definición de logaritmo**:

1  $\log_2 32 = x$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

2  $\log_9 \frac{1}{3} = x$

$$(9)^x = \frac{1}{3}$$

$$3^{2x} = 3^{-1}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

3  $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{25}{100}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = 2$$

4  $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

$$(9)^x = \sqrt[4]{3}$$

$$3^{2x} = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

5  $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

$$(\sqrt{2})^x = \frac{1}{4}$$

$$2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-2}$$

$$x = -4$$

6  $\log_x 81 = -4$

$$x^{-4} = 81$$

$$x^4 = \frac{1}{81}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

7  $\log_2 x^3 = 6$

$$x^3 = 2^6$$

$$x = 4$$

Conociendo que  $\log 2 = 0.3010$ , **calcula** los siguientes **logaritmos decimales**.

1  $\log 0.02$

$$\log\left(\frac{2}{100}\right) = \log 2 - \log 10^2 = \log 2 - 2 = 0.3010 - 2 = -1.6989$$

$${}_2 \log \sqrt[4]{8}$$

$$\log \sqrt[4]{2^3} = \frac{3}{4} \log 2 = \frac{3}{4} \cdot 0.3010 = 0.2257$$

$${}_3 \log 5$$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.69897$$

$${}_4 \log 0.0625$$

$$\log\left(\frac{625}{10000}\right) = \log\left(\frac{5^4}{2^4 \cdot 5^4}\right) = \log\left(\frac{1}{2^4}\right) =$$

$$\log 1 - \log 2^4 = 0 - 4 \log 2 = -1.2040$$

Calcular los logaritmos de de las expresiones que se indican:

$${}_1 \ln \frac{x^2 \cdot y \cdot (m+n)}{m \cdot n} =$$

$$= \ln [x^2 \cdot y \cdot (m+n)] - \ln (m \cdot n) =$$

$$= \ln x^2 + \ln y + \ln(m+n) - (\ln m + \ln n) =$$

$$= 2 \ln x + \ln y + \ln(m+n) - \ln m - \ln n$$

$${}_2 \log_2 \frac{a^2 - b^2}{a \cdot b} =$$

$$= \log_2 \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{a \cdot b} =$$

$$= \log_2 [(a+b) \cdot (a-b)] - \log_2 (a \cdot b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - (\log_2 a + \log_2 b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - \log_2 a - \log_2 b$$

$${}_3 \log 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned}\log 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \log 2 + \log \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log (2\sqrt{2\sqrt{2}}) = \log 2 + \frac{1}{2} \left[ \log 2 + \frac{1}{2} \log (2\sqrt{2}) \right] = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \left[ \log 2 + \frac{1}{2} (\log 2 + \log \sqrt{2}) \right] = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \left[ \log 2 + \frac{1}{2} \left( \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 \right) \right] = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{8} \log 2 = \frac{15}{8} \log 2\end{aligned}$$