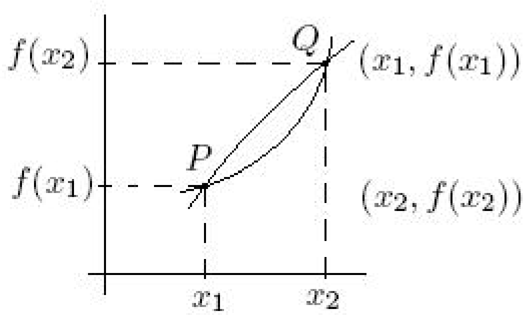
Razón de cambio



Si x cambia de x_1 a x_2 tenemos que
$\triangle x = x_2 - x_1$
y el cambio correspondiente en y es:
$\triangle y = f(x_2) - f(x_1)$

El cociente de las diferencias $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ se llama razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la línea secante PQ.

Al hacer $\triangle x \to 0$ el límite de estas relaciones se llama razón instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$

Razón de cambio instantánea= $\displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

En Física

Si $f(t) = s$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, $\dfrac{\triangle s}{\triangle t}$ representa la velocidad promedio $\triangle t$ y $v = \dfrac{ds}{dt}$ representa la velocidad instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo).

La razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Ejemplo: La ecuación siguiente da la posición de una partícula $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.

Sol.- $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \quad \Rightarrow \quad s'(t) = v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

b) ¿Cuál es la velocidad despues de 2 y 4 seg.?

Sol.- $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \ \frac{m}{s}$

c)¿Cuando esta en reposo la partícula?

Sol.- $v(t) = 0 \ \to \ 3t^2 + 12t + 9 = 0 \ \to \ 3(t^2 + 4t + 3) = 0 \ \to \ 3(t-1)(t-3) = 0 \ \to \ t = 1, \quad t = 3$

$\therefore$ la particula esta en reposo en $t = 1$, y $t = 3$

d)¿Cuando se mueve hacia adeltante (en dirección positiva)?

La partícula se mueve hacia adeltante si $v'(t) > 0$

$3t^2 - 12t + 9 > 0 \;\rightarrow\; 3(t^2 + 4t + 3) > 0 \;\rightarrow\; 3(t-1)(t-3) > 0 \;\rightarrow$
$t > 1$ y $t > 3 \;\rightarrow\; t > 3$
$t < 1$ y $t < 3 \;\rightarrow\; t < 1$
y en dirección negativa
$t - 1 < 0 \;\rightarrow\; t < 1 \qquad t - 1 > 0 \;\rightarrow\; t > 1$
$t - 3 > 0 \;\rightarrow\; t > 3 \qquad t - 3 < 0 \;\rightarrow\; t < 3 \quad \Rightarrow \quad 1 < t < 3$
e) Encuentra la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros 5 seg.
Sol.- En $[0,1] \quad |f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4$
$[1,3] \quad |f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4$
$[3,5] \quad |f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20$
$\therefore$ la distancia total es 28.
f)Hallar la aceleración en el tiempo t y despues de 4 seg.
Sol.- $a(t) = 6t - 12 \;\rightarrow\; a(4) = 6(4) - 12 = 12$

En Biología

Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\triangle n = f(t_2) - f(t_1)$ de modo que la rapidez de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leq t \leq t_2$ es:

$$\frac{\triangle n}{\triangle t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Y a partir de esta rapidez promedio al hacer $\triangle t \rightarrow 0$ obtenemos la rapidez instantánea de crecimiento

$$\lim_{\triangle t \rightarrow 0} \frac{\triangle n}{\triangle t} = \frac{dn}{dt}$$

Ejemplo: Considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas,

$f(1) = 2f(0) = 2n_0$
$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$
$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$

y en general $f(t) = 2^t n_0$

$\therefore$ La función de población es $n = n_0 2^t \qquad \dfrac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2$

Suponga que la población inicia con $n_0 = 100$ bacterias. En consecuencia, la rapidez de crecimiento de la población despues de 4 horas es $\dfrac{dn}{dt} = 100(2)^4 \ln 2 = 1109$
Esto significa que despues de 4 horas la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1109 bacterias.
Ejemplo: Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la razón de cambio es 4. Hallar la razón de cambio del área cuando el radio es de 6.

Sol.-Se tiena que el área de un circulo es $A(r) = \pi \cdot r^2$ y en este caso $A'(r) = 2\pi r r'$ y tenemos que en $r = 6$ $A'(r) = 4$ por lo tanto sustituimos en $A'(r) = 2\pi r r' = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi$

Ejemplo: El área de una corona circular de radios interior y exterior variables se mantiene constante e igual a $9 \cdot \pi cm^2$. El área del circulo exterior varia a razon de $10 \cdot \pi\ cm^2/seg.$ ¿A que velocidad varia la circunferencia interiorcuando el área de éste es de $16 \cdot \pi\ cm^2$?

Sol.-Sean r_1 el radio del circulo interior y r_2 el radio del circulo exterior de la corona, de tal manera que

$$A_{corona} = A_{circulo\ \ exterior} - A_{circulo\ interior} = \pi\ r_2^2 - \pi\ r_1^2 = 9 \cdot \pi$$

por lo tanto

$$[A_{corona}]' = 2\ \pi\ r_2\ r_2' - 2\ \pi\ r_1\ r_1' = 0$$

como $[A_{circulo\ exterior}]' = 10\ \pi\ cm^2$ entonces

$$2\ \pi\ r_2\ r_2' - 2\ \pi\ r_1\ r_1' = 0 \Rightarrow 10\pi - 2\ \pi\ r_1\ r_1' = 0 \Rightarrow r_1' = \frac{10\ \pi}{2\ \pi\ r_1}$$

ahora bien el área del circulo interior es $16\ \pi$ cuando $r = 4$ y en ese momento

$$r_1' = \frac{10\ \pi}{2\ \pi\ r_1} \Rightarrow r_1' = \frac{10\ \pi}{2\ \pi\ 4} = \frac{5}{4}$$

por tanto la circunferencia interior $C_1 = 2\ \pi\ r_1$ satisface

$$C_1' = 2\ \pi\ r_1' = 2\ \pi\ \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}\pi$$

Ejemplo: Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal X positivo, mientras otra partícula B lo hace a lo largo de la gráfica $f(x) = -\sqrt{3}x$ con $x \leq 0$, en cierto instante, A se halla en el punto $(5, 0)$ desplazandose a una velocidad de 3 unidades por segundo y en ese mismo instante, B se halla a una distancia de 3 unidades del origen con una velocidad de desplazamiento de 4 unidades por segundo. ¿A que velocidad varia la distancia de A a B?

Sol.- Sea $(a(t), 0)$ la posición de la partícula A en el tiempo t, notamos que para cierto t tenemos $a(t) = 5$ y $a'(t) = 3$.

Si $(b(t), -\sqrt{3}b(t))$ es la posición de la partícula B al tiempo t, entonces la distancia al origen es:

$$d(t) = \sqrt{[b(t)]^2 + 3\,[b(t)]^2} = \sqrt{4\,[b(t)]} = 2\,|b(t)| = -2b(t)$$

y para un cierto t,

$$-2b(t) = 3 \Rightarrow b(t) = -\frac{3}{2} \quad y \quad -2b'(t) = 4 \Rightarrow b'(t) = -2$$

ahora bien la distancia entre A y B satisface

$$d(t) = \sqrt{(a(t) - b(t))^2 + 3(b(t))^2}$$

en cierto t

$$\sqrt{\left(5 + \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 7$$

y derivando $d^2(t)$ tenemos

$$2 \cdot d(t) \cdot d'(t) = 2 \cdot (a(t) - b(t)) \cdot (a'(t) - b'(t)) + 6 \cdot b(t) \cdot b'(t)$$

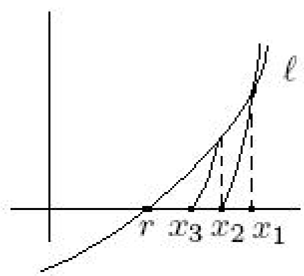
para cierto t

$$2 \cdot d(t) \cdot d'(t) = 2 \cdot \left(5 + \frac{3}{2}\right) \cdot (3+2) + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(-2)$$

$\therefore$

$$d'(t) = \frac{83}{14}$$

Metodo de Newton-Raphson
(Aproximación de raices de una función)



Por medio de la ecuación punto pendiente $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

Como la intersección de ℓ con $\overline{X}$ es x_2 y $y = 0$

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \quad \rightarrow \quad \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1 = x_2$$

y en general $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Ejemplo: Empiece con $x_1 = 2$ y encuentre la tercera aproximación x_3 para la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$

Sol.- Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 2$ y $x_2 = \dfrac{2 - 2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$

$$x_3 = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Ejemplo: Aplique el método de Newton para hallar $\sqrt[6]{2}$ correcto hasta ocho cifras decimales.

Sol.- $f(x) = x^6 - 2 = 0 \qquad f'(x) = 6x^5$

Si se elige $x_1 = 1$ entonces $x_2 = 1 - \dfrac{1^6 - 2}{6(\frac{1}{5})} \approx 1.166 \qquad x_3 = 1.166 - \dfrac{(1.166)^6 - 2}{6(1.166)^5} \approx 1.12249$

$x_4 = 1.12249 - \dfrac{(1.12249)^6 - 2}{6(1.12249)^5} \approx 1.122446 \quad x_5 = 1.122446 - \dfrac{(1.122446)^6 - 2}{6(1.122446)^5} \approx 1.1224605$

$x_6 \approx 1.1224605$

x_5 y x_6 coinciden hasta 8 cifras.

$\therefore \quad \sqrt[6]{2} \approx 1.224466205$